Elementi di teoria dei segnali

La rappresentazione in frequenza secondo Fourier

Trattamento dei segnali in frequenza

Filtri e larghezza di banda dei canali

Digitalizzazione e teorema del campionamento

Capacità di canale e larghezza di banda

Dal discreto al continuo …

Come interpretare i risultati della teoria dell'informazione, ottenuti con un modello discreto ("a simboli"), nel caso di sistemi che operano *nel continuo*, dunque mediante segnali in tensione, corrente, ...?

Vale, a questo proposito, un fondamentale risultato dovuto a Fourier:

una funzione x(t) periodica di periodo T può, sotto ipotesi sufficientemente ampie, essere ottenuta come sovrapposizione (= somma) di funzioni sinusoidali e cosinusoidali

cioè: se x(t) è periodica di periodo T (e quindi $\forall t,n$: $x(t+nT)=x(t)$),

con $\frac{1}{T} = f_0$ (*frequenza fondamentale*) $= \frac{\omega_0}{2\pi}$ (ω_0: *pulsazione fondamentale*)

$$x(t)=\frac{a_0}{T} + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

$$\text{con } a_n = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt \qquad b_n = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt$$

La serie e l'integrale di Fourier

E' possibile una seconda rappresentazione, più complessa ma più espressiva:

$$c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2} \qquad \theta_n=\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \qquad x(t)=\frac{a_0}{T}+\frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t+\theta_n)$$

Ogni componente co(sinusoidale) (= componente armonica) della funzione è completamente caratterizzata dai due termini $2c_n/T$, la sua *ampiezza*, e θ_n, la sua *fase*

In alternativa alla rappresentazione su un piano (tempo x ampiezza), la funzione può essere dunque presentata su due piani (frequenza x ampiezza) e (frequenza x fase)

Sotto opportune ipotesi matematiche, una funzione del tempo definita su un intervallo temporale finito T può essere espressa in serie di Fourier di periodo T; "prolungando" T a ∞ la serie "tende ad un integrale" (integrale di Fourier) e ω "tende a diventare una variabile continua": le righe sul piano (frequenza x ampiezza) si trasformano in un diagramma continuo

Spettro di ampiezza e potenza dissipata

Se la funzione x(t) espansa in serie / integrale di Fourier è un segnale in tensione, la potenza media dissipata ai capi di un resistore da 1Ω dalla componente armonica n-esima del segnale è:

$$P_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left(\frac{2}{T}c_n\cos(n\omega_0 t+\theta_n)\right)^2 dt \propto c_n^2 \text{ W}$$

→ Il quadrato dello spettro di ampiezza è una misura della potenza media dissipata in un resistore da 1 Ω frequenza per frequenza

Sommando i contributi alla potenza dissipata dalle varie armoniche, si ottiene la potenza media dissipata da una d.d.p periodica

I valori del segnale: dB e RMS

Spesso i valori in scala y (ampiezze o potenze) hanno un range di variabilità molto elevato: in tal caso si può usare una visualizzazione logaritmica invece di una lineare

Per mettere in evidenza il rapporto tra due valori (p.es. segnale/rumore: S/N) si usano i decibel (dB), definiti come:

$$10 \log_{10}\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = 20 \log_{10}\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = \text{valore del rapporto delle potenze / ampiezze in dB}$$

Per esempio, un rapporto S/N in potenza pari a 40 dB significa che il segnale ha una potenza 10^4 volte maggiore del rumore

Può essere poi utile mettere in evidenza il valor medio del segnale, dunque il suo “equivalente in continua” (*direct current*, DC), o il suo “equivalente positivo in continua” (*root mean square*, RMS):

$$x_{DC} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} x(t)\,dt \quad \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\right) \qquad x_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,dt} \quad \left(\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2}\right)$$

DFT e FFT

Discrete Fourier Transform (DFT) è un algoritmo (particolarmente efficiente nella sua versione Fast Fourier Transform, FFT) che trasforma segnali *nel dominio (discreto) del tempo* nei corrispondenti segnali *nel dominio delle frequenze*:

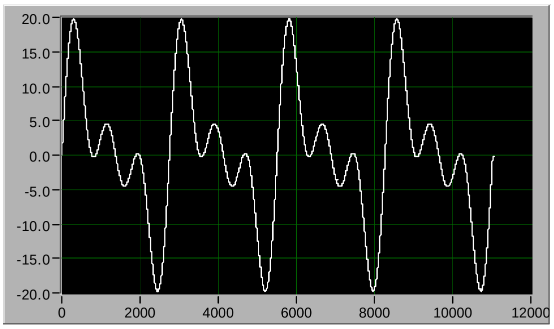
IN: successione $\{x_i\}$ con x_i ampiezza del segnale al tempo i

OUT: successione complessa $\{X_j\}$ con:

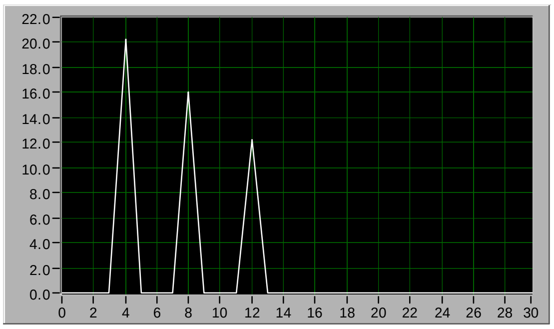
$\sqrt{Re(X_j)^2 + Im(X_j)^2}$ ampiezza del segnale alla frequenza j

$\arctan\left(\frac{Im(X_j)}{Re(X_j)}\right)$ fase del segnale alla frequenza j

Per esempio:



ampiezze nel tempo

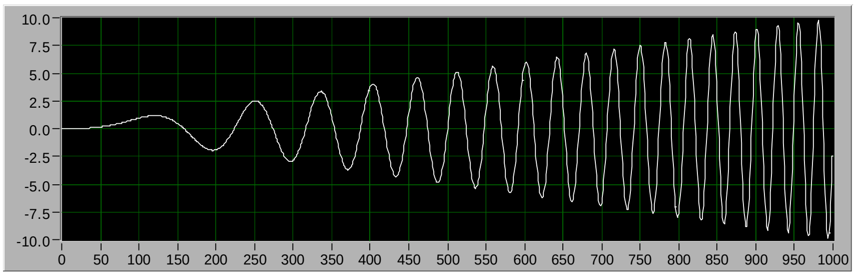


ampiezze in frequenza

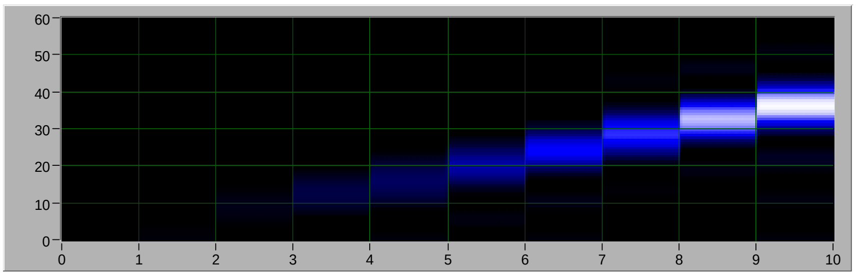
Sono algoritmi invertibili (“anti-trasformata di Fourier”): da frequenze nuovamente a tempo

STFT

“Finestrando” nel tempo il segnale, se ne può analizzare la distribuzione di energia congiuntamente nel tempo e in frequenza (joint time-frequency domain, JTFD) mediante Short-Time Fourier Transform (STFT), un algoritmo che effettua una “sliding FFT”



nel tempo



in tempo-frequenza

Uno spettrogramma è dunque un diagramma che simula il 3D con i colori

Luca Mari, Strumentazione Elettronica di Misura

Il problema della finestratura (*windowing*)

Gli algoritmi che calcolano la trasformata di Fourier operano su successioni $\{x_i\}$, i=1,...,n

La complessità computazionale della DFT e della FFT è dell’ordine di n^2 e nlog(n) rispettivamente (ma FFT è applicabile solo se $n=2^k$, per k intero positivo)

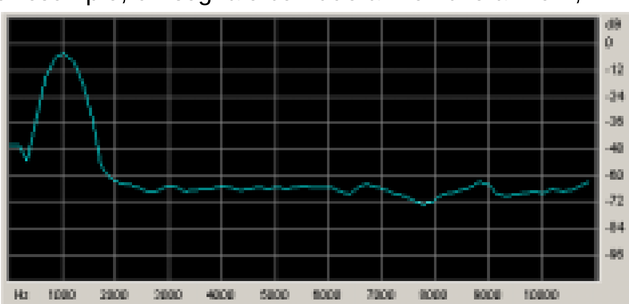
Per ragioni di fattibilità, il calcolo viene dunque tipicamente eseguito suddividendo la successione in “finestre temporali” di ampiezza ridotta, e sovrapponendo poi i risultati

Relativamente alle dimensioni della finestra si presenta un trade-off:

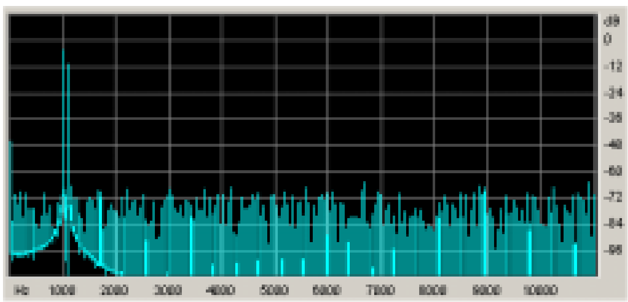
all’aumentare del numero di punti su cui è calcolata la trasformata

aumentano i tempi di calcolo ma migliora la risoluzione spettrale

Per esempio, un segnale con due armoniche a 1 e 1,1 kHz + rumore elettronico:



(finestra a 128 punti)



(finestra a 64k punti)