Elementi di teoria dei segnali /b

Filtri e larghezza di banda dei canali

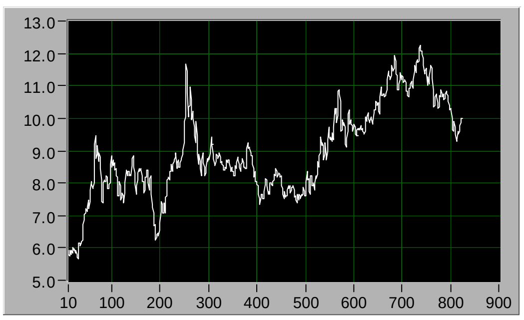
Digitalizzazione e teorema del campionamento

Capacità di canale e larghezza di banda

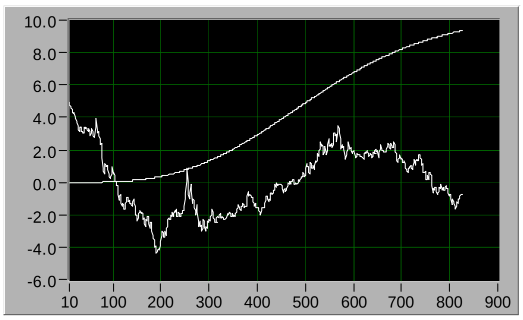
Multiplexing e modulazioni

Filtri

Un tipico impiego della FFT è per la realizzazione di filtri numerici (invece che elettronici):
* si trasforma in frequenza il segnale da filtrare
* si modifica lo spettro del segnale:
  - definendo una *frequenza di taglio*, f, ed eliminando le armoniche sopra o sotto f (filtri passabasso e passaalto rispettivamente)
  - definendo due frequenze di taglio, f_1 e f_2, ed eliminando le armoniche esterne o interne all'intervallo $[f_1, f_2]$ (filtri passabanda e fermabanda rispettivamente)
* si antitrasforma il segnale filtrato, ottenendo una nuova versione del segnale di partenza



segnale originario



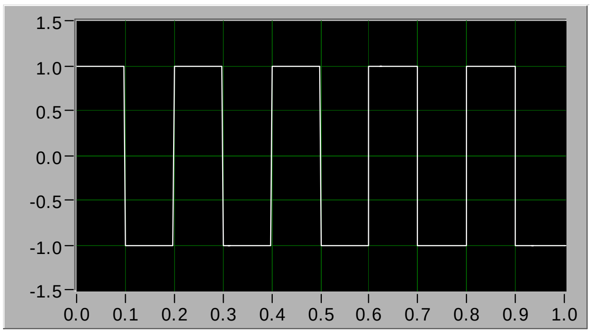
segnale filtrato passabasso e passaalto

Larghezza di banda

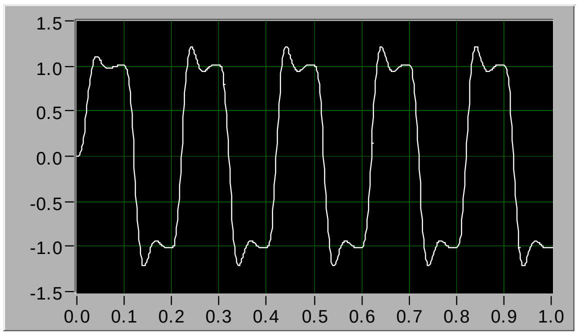
Ogni canale reale si comporta come un filtro (passabasso o passabanda): è in grado di trasferire senza distorsione (= con un comportamento lineare) solo le componenti armoniche del segnale in ingresso comprese tra una frequenza minima f_1 (spesso =0) e una frequenza massima f_2

Il valore $w=f_2-f_1$ si chiama *larghezza di banda* del canale (e si misura in hertz, naturalmente)

L'attenuazione delle armoniche al di fuori dell'intervallo $[f_1, f_2]$ non è lineare: se il segnale ha un contenuto armonico significativo fuori da $[f_1, f_2]$, in uscita dal canale risulterà distorto



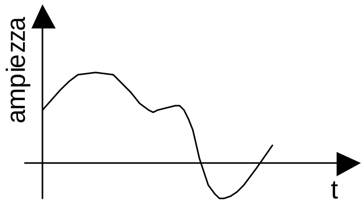
segnale originario



segnale in uscita da un canale con una banda tale da trasferire solo le prime due armoniche

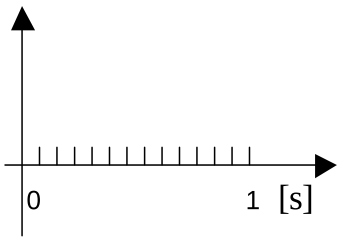
La digitalizzazione dei segnali continui /1

Dato un segnale le cui ampiezze sono valutabili in ogni istante temporale e variano in modo continuo in un intervallo di ampiezze dato:

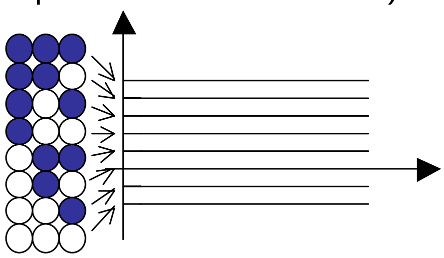


per poter memorizzare / trasmettere mediante una successione finita di bit_m il segnale occorre discretizzarlo sia nel tempo (*campionamento*) sia nelle ampiezze (*quantizzazione*)

Setup: si decidono il numero di campioni (simboli ...) al secondo da acquisire (f_c, frequenza di campionamento) e il numero di canali (simboli diversi ...) in cui verranno distinte le ampiezze (n_q, numero di bit di quantizzazione, nell'ipotesi di codifica binaria)



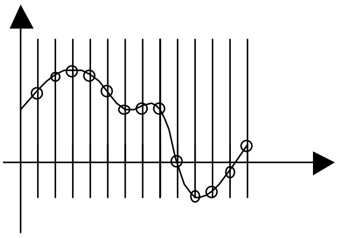
f_c = 13 simboli/s (Hz)

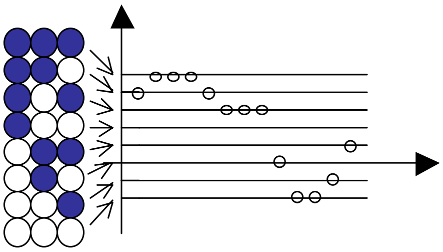


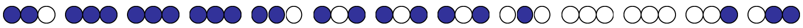
n_q = 3 bit/simbolo

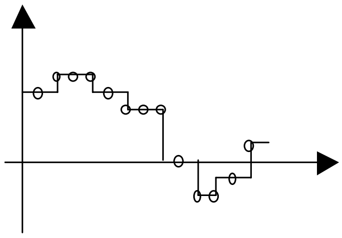
La digitalizzazione dei segnali continui /2

Realizzazione: a questo punto il segnale può essere campionato e quindi quantizzato:





Il segnale prodotto:  corrisponde a:



... che visibilmente contiene meno informazione del segnale di partenza

Si può digitalizzare un segnale senza perdere l'informazione che esso porta?

Il teorema del campionamento

Il contenuto armonico di ogni segnale reale è trascurabile sopra a una certa frequenza, f_{max}

Se si sceglie di campionare con $f_c \geq 2\ f_{max}$ nel campionamento non si perde informazione, cioè il segnale è perfettamente ricostruibile (mediante un'opportuna interpolazione) a partire dalla successione dei campioni
(il valore $2\ f_{max}$ è detto *frequenza di Nyquist*, *Nyquist rate*)

... mentre non esiste un equivalente "teorema della quantizzazione": all'aumentare di n_q si riduce la quantità di informazione persa nella quantizzazione, ma tale quantità non può essere, in generale, annullata

Per esempio, notoriamente, per i segnali audio f_{max}=20 kHz:
campionando ad almeno 40 kHz non si perde informazione

Infatti i CD audio hanno una durata di circa 60 minuti x 2 canali; gli equivalenti CD dati:
3600 s x 2 canali x 45 ksimboli/s x 2 byte/simbolo = 650 Mbyte

Una conseguenza: aliasing

La FFT opera su segnali discreti, dunque pre-campionati

Se il segnale su cui si opera ha una durata di t secondi ed è stato campionato a f_c Hz, la successione complessa $\{X_j\}$ che la FFT produce in output è costituita da t x f_c elementi ed è strutturata in modo simmetrico intorno a $f_c/2$

(p.es. nel caso t=1 s e f_c=8 Hz:

0 1 2 3 4 5 6 7

componente DC — armoniche *in ordine inverso*

armoniche identificate — Nyquist rate

Se il segnale viene campionato a una frequenza inferiore al Nyquist rate, $f_c < 2 f_{max}$, le sue armoniche a frequenza superiore a $f_c/2$ si presentano, specularmente, sotto a f_{max}

(p.es. se f_c=100 Hz due sinusoidi a f=20 Hz e 80 Hz risultano di fatto indistinguibili)

Questo fenomeno si chiama *aliasing*: per evitarlo, si deve filtrare passabasso il segnale prima di campionarlo, per cercare di eliminare le componenti armoniche sopra a $f_c/2$

Canali: il link tra discreto e continuo /1

Un canale reale C:

→ a larghezza di banda w limitata

→ ad ampiezza massima del segnale S limitata e ad ampiezza del rumore N non nulla

e di capacità K(C) = n_1 bit/simbolo x n_2 simboli/s

può essere caratterizzato nel continuo assumendo che i simboli siano livelli di segnale distinguibili:

* sia in *ampiezza* , perché sufficientemente separati dagli altri livelli

* sia nel *tempo*, perché mantenuti per un intervallo τ sufficientemente lungo

Il numero di livelli distinguibili (e quindi di simboli) è (S+N)/N = 1 + S/N

e passando da ampiezze a potenze: $(1 + S/N)^{1/2}$

Adottando una codifica a lunghezza costante, il canale è in grado di portare al massimo:

→ $n_1 = \frac{1}{2}\log_2(1+\frac{S}{N})$ bit/simbolo

Canali: il link tra discreto e continuo /2

La velocità di trasmissione è $\frac{1}{\tau} = n_2$ simboli/s

Interpretando "all'inverso" il teorema del campionamento, su un canale con larghezza di banda w possono essere portati fino a 2w simboli/s

→ $n_2 = \frac{1}{\tau} = 2w$

$$K(C) = n_1 n_2 = w \log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$$

... fondamentale risultato a cui giunse C.Shannon nel 1948

Concettualmente la sua importanza deriva, in particolare, dal fatto che stabilisce una relazione tra una grandezza *discreta* e *relativa al mondo dell'informazione*, la capacità di canale, e due *continue* e *relative al mondo fisico*, la larghezza di banda e il rapporto segnale/rumore

Luca Mari, Strumentazione Elettronica di Misura

Un esempio

... di applicazione di: $K(C) = w \log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$

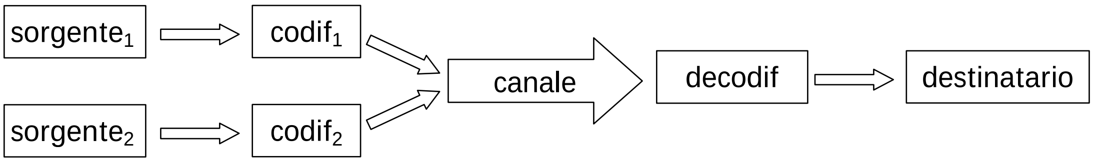
Nel caso di telefono + modem (uso discreto di un canale continuo):

Dei valori tipici:
$K(C) = 30$ kbit/s
$w = 3$ kHz

Dunque: $\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right) = 10$ e quindi $\frac{S}{N} \approx 1000 = 30$dB, un valore notevolmente alto per le condizioni tipiche del sistema telefonico ...

Ancora sull'uso dei canali: multiplexing

Quando il canale ha una capacità sufficiente, può essere condiviso da più sorgenti:



La condivisione del canale (*multiplexing*) viene realizzata con scansione:

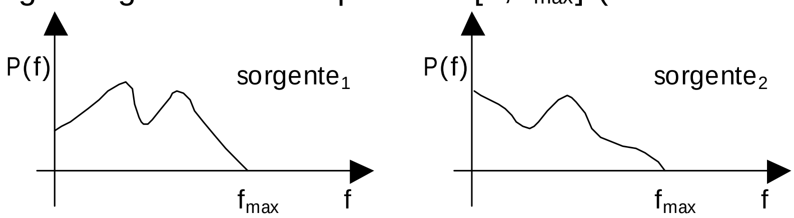
* in tempo (*time division mux*, TDM)
* in frequenza (*frequency division mux*, FDM)

Nel caso TDM, il tempo disponibile viene suddiviso tra le sorgenti, che si alternano nell'accesso al canale (analogamente alla tecnica del multitasking, che consente a più processi di condividere uno stesso processore)

Nel caso FDM, la larghezza di banda disponibile viene suddivisa tra le sorgenti, ognuna delle quali riceve una parte dello spettro su cui poter trasmettere

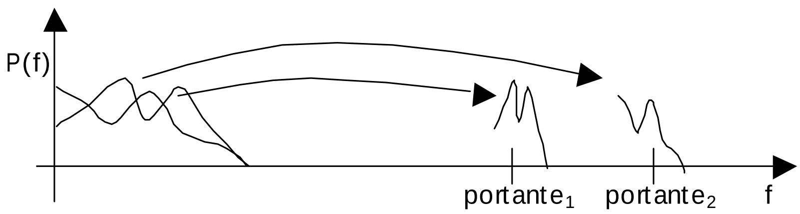
FDM

Concettualmente: ogni sorgente ha uno spettro in [0, f_{max}] ("banda base")



Ognuna usa una portante, cioè un segnale sinusoidale ad alta frequenza, per spostare il suo spettro in una zona assegnata dello spettro, intorno alla frequenza della portante

Sempre concettualmente:

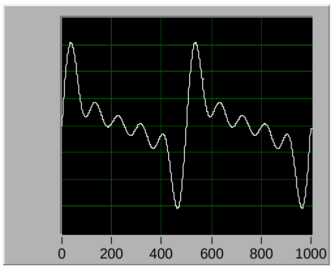


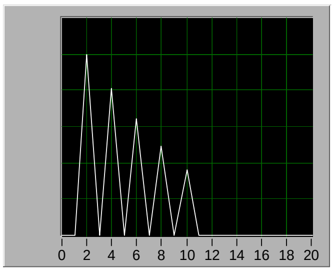
La modulazione sposta lo spettro del segnale dalla banda base alla zona dello spettro intorno alla portante assegnata

Per esempio: modulazione di ampiezza /1

Prendiamo, per esempio, un segnale tale che f_{max}=10 Hz

segnale

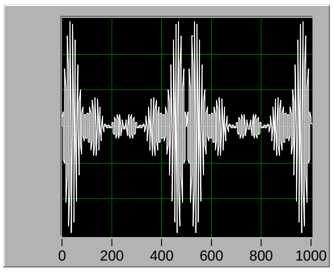


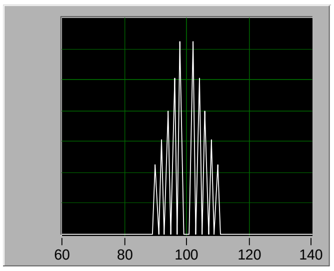


spettro

Se lo moltiplichiamo per una sinusoide (*portante*) di frequenza f_p=100 Hz, si modifica l'ampiezza della portante in funzione dell'ampiezza del segnale di partenza (*modulante*):

segnale modulato





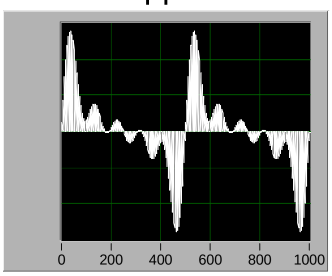
spettro

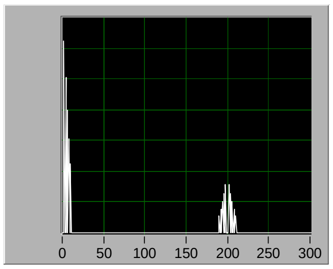
Lo spettro del segnale modulante viene duplicato intorno a f_p (il segnale modulato occupa perciò una banda $[f_p – f_{max}, f_p + f_{max}]$ = [90, 110] Hz, doppia rispetto al segnale modulante)

Modulazione di ampiezza /2

Per demodulare, se moltiplichiamo il segnale modulato per la stessa portante otteniamo il segnale originario, con sovrapposta una copia del segnale modulato intorno a $2f_p$:

segnale demodulato





spettro

Filtrando passabasso, con frequenza di taglio per esempio uguale a f_p, si eliminano le armoniche ad alta frequenza e si riottiene il segnale di partenza