Incertezze di misura

La variabilità sperimentale delle letture

Ripetendo l'applicazione di un sistema di misura a una cosa apparentemente sempre in uno stesso stato, come dato di fatto si osserva che si ottengono letture più o meno sensibilmente differenti

Le cause possono essere molteplici, e tipicamente non sono note:

→ il sistema di misura non è perfettamente stabile, dunque a parità di stato della cosa da misurare non transisce sempre nello stesso stato ("cause strumentali")

→ una o più grandezze di influenza sono variate senza che l'osservatore se ne accorgesse ("cause ambientali")

→ il misurando non è stato definito con sufficiente precisione ("cause modellistiche")

→ ... effettivamente la cosa da misurare ha cambiato stato

Passando da lettura/e a misura occorre tenere in considerazione tale variabilità in quanto caratteristica inerente alla misura e formalizzarla in modo opportuno
(e ciò come fatto generale, cioè anche nei casi di una sola lettura!)

Si modellizza e formalizza tutto ciò riconoscendo che la misura è INCERTA

L'espressione delle misure

E' richiesto che OGNI misura esprima non solo il valore stimato per il misurando, ma anche la sua incertezza:

grandezza(cosa) = valore di riferimento (incertezza) unità di misura

Per esempio: R(x) = 10,26 (3) Ω

da intendersi come:

la resistenza della cosa x è pari a 10,26 ohm con un'incertezza pari a 0,03 ohm

Note:

→ "grandezza" dovrebbe specificare come il misurando è definito, includendo le eventuali grandezze di influenza (p.es.: resistenza misurata a 20 °C tra due punti definiti della cosa)

→ "cosa" dovrebbe specificare quanto occorre per identificare lo stato della cosa (p.es. l'istante di applicazione del sistema di misura per misurazioni di grandezze dinamiche)

→ dovrebbero inoltre essere indicati complementariamente i metodi adottati per calcolare il valore dell'incertezza

Circa l'incertezza delle misure

(in riferimento a Guide to the expression of uncertainty in measurement, ISO, 1992)

L'incertezza è valutabile con metodi statistici ("<u>metodi di valutazione di tipo A</u>") o con altri metodi ("<u>metodi di valutazione di tipo B</u>")

→ Nel primo caso deve essere valutata come la deviazione standard della media dell'insieme sperimentale delle letture, dunque come stimatore della distribuzione di probabilità da cui si ipotizza le letture siano estratte

→ Nel secondo caso deve essere valutata ancora come se si trattasse di una deviazione standard, pur senza disporre di una base statistica al riguardo, dunque secondo un'interpretazione soggettivistica della probabilità, intesa come "grado di credenza" (*degree of belief*) dell'osservatore

Dunque, in entrambi i casi, la raccomandazione ISO è di esprimere l'incertezza come una deviazione standard

ISO 1992 …

«Although this *Guide* provides a framework for assessing uncertainty, it cannot substitute for critical thinking, intellectual honesty, and professional skill.

The evaluation of uncertainty is neither a routine task nor a purely mathematical one; it depends on detailed knowledge of the nature of the measurand and of the measurement method and procedure used.

The quality and utility of the uncertainty quoted for the result of a measurement therefore ultimately depends on the understanding, critical analysis, and integrity of those who contribute to the assignment of its value»

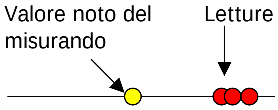
L'incertezza formalizza la qualità della misura … e sulla qualità non si dovrebbe barare

Accuratezza e incertezza

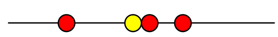
Nel caso di cui conoscessimo (a priori, o comunque mediante procedure diverse dalla misurazione in considerazione) il valore del misurando, potremmo descrivere la variabilità sperimentale delle letture secondo due fattori:

* la "posizione media" dell'insieme delle letture rispetto al valore noto del misurando: *accuratezza*

* la dispersione dell'insieme delle letture: *incertezza*



Caso di bassa accuratezza
ma bassa incertezza



Caso di buona accuratezza
ma grande incertezza

… il fatto è che non è così tipico che il valore del misurando sia noto ancor prima di misurare …

Errore e incertezza

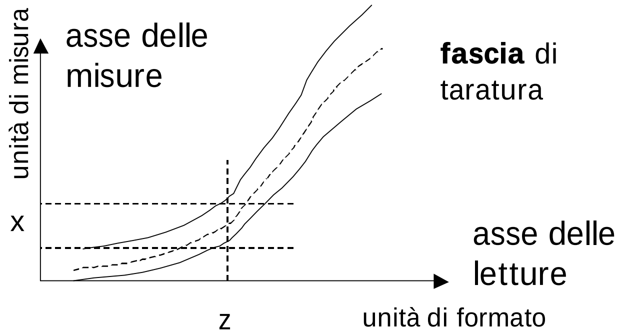
Nel caso di cui conoscessimo (a priori, o comunque mediante procedure diverse dalla misurazione in considerazione) il valore del misurando, potremmo descrivere la non perfetta accuratezza della misura come un *errore*

(dunque: ogni errore genera incertezza, ma non ogni incertezza deriva da errori)

Per esempio, in riferimento alla taratura, errori:

* di zero (la curva di taratura attraversa lo zero in un punto diverso)
* di guadagno (la pendenza della curva di taratura è diversa)
* di linearità (a differenza dell'ipotesi, la curva di taratura non è lineare)

Dunque nel diagramma di taratura, la curva di taratura deve diventare una "fascia":



Da letture a misure

Una grandezza X è stata valutata N volte (dunque con metodo di tipo A) e come risultato di tali valutazioni sono state ottenute le letture $x_1, \ldots, x_N$.

La grandezza è allora formalizzabile come una variabile casuale, di cui sono calcolabili in particolare:

il valor medio $\mu_X = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j$

la varianza $\sigma^2_X = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(x_j - \mu_X)^2$ e la varianza della media $\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{1}{N}\sigma^2_X = u^2_X$

alla cui radice quadrata u_X viene assegnato il nome di incertezza standard

Dunque la misura sarà in tal caso:

valore di riferimento (incertezza standard) = μ_X (u_X)

Una regola generale analoga per la valutazione di tipo B non esiste: occorre "fidarsi" dei valori che vengono forniti (specifiche del costruttore, stime dell'esperto, ...)

Non solo misurazioni dirette …

<u>Metodi di misurazione:</u>

→ *diretto*: il valore del misurando è ottenuto mediante l'applicazione di un sistema di misura

→ *indiretto*: il valore del misurando è ottenuto a partire dalla misurazione di altre grandezze legate funzionalmente al misurando e mediante il successivo calcolo di tale funzione

Sia data una relazione funzionale (una "legge fisica"):

$$Y = f(X_1,\ldots,X_K)$$

tra K grandezze X_i e la grandezza Y

Se le X_i sono variabili casuali, ognuna con valor medio μ_i e incertezza standard u_i, evidentemente anche la Y sarà una variabile casuale, dipendente secondo f dalle X_i

Dalle K coppie (μ_i, u_i) e conoscendo l'espressione analitica di f si pone il problema di calcolare il valor medio μ_y e l'incertezza standard u_y della variabile casuale Y (cioè la misura per il misurando Y)

Il calcolo di misure da misurazioni indirette

Per quanto riguarda μ_y, la scelta tipica è: $\mu_y = f(\mu_1,\ldots,\mu_K)$

Per calcolare u_y sviluppiamo f in serie di Taylor intorno a $(\mu_1,\ldots,\mu_K)$:

$$y = f(x_1,\ldots,x_K) = f(\mu_1,\ldots,\mu_K) + \sum_{i=1}^{K} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - \mu_i)$$

arrestandosi ai termini del primo ordine, nell'ipotesi che gli scarti $(x_i - \mu_i)$ siano sufficientemente piccoli, che il comportamento di f intorno a $(\mu_1,\ldots,\mu_K)$ sia sufficientemente lineare e che le correlazioni tra le X_i siano trascurabili ($\partial f/\partial x_i$ è una notazione abbreviata per $\partial f/\partial x_i$ calcolato nei valori medi μ_i)

Dunque:

$$y - f(\mu_1,\ldots,\mu_K) = y - \mu_y = \sum_{i=1}^{K} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - \mu_i)$$

La legge di propagazione delle incertezze

E' dunque stabilita una dipendenza dei piccoli scarti di y intorno a $f(\mu_1,...,\mu_K)$ dai piccoli scarti delle x_i intorno ai valori medi μ_i. Elevando al quadrato:

$$(y-\mu_y)^2 = \left(\sum_{i=1}^{K} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i-\mu_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^{K} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 (x_i-\mu_i)^2$$

e quindi:

$$u^2_y = \sum_{i=1}^{K} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2_i$$

espressione chiamata legge di propagazione delle incertezze, che consente di calcolare l'incertezza standard del misurando Y (definita *incertezza standard combinata*) in funzione delle incertezza standard delle grandezze X_i

Un esempio

Si vuole valutare la potenza P dissipata ai capi di un resistore a cui è applicata una tensione, ma non si dispone di un sistema per misurare direttamente P

Si ricorda, d'altra parte, che $P = V^2/R$, dove V è la tensione applicata al resistore e R è la sua resistenza

Disponendo di un sistema di misura che consente di valutare V e R, si potrà allora ricavare analiticamente P

Supponiamo che per V e R siano disponibili più letture

Da tali letture si calcolano i valori medi μ_V e μ_R e le incertezze standard u_V e u_R, così che le misure per V e R sono μ_V (u_V) e μ_R (u_R) rispettivamente

Il problema è dunque di calcolare una misura μ_P (u_P) per la potenza dissipata

Per quanto riguarda μ_P, semplicemente $\mu_P = \mu_V^2/\mu_R$

Per calcolare u_P si utilizza la legge di propagazione delle incertezze:

$$u_P^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)^2 u_V^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)^2 u_R^2 = \left(\frac{2\mu_V}{\mu_R}\right)^2 u_V^2 + \left(-\frac{\mu_V^2}{\mu_R^2}\right)^2 u_R^2$$

Un altro esempio

Siano date K misure di una stessa grandezza X, dunque ognuna espressa come:

valore di riferimento(incertezza standard) = $x_i(u_i)$

(potrebbero essere, per esempio, K campioni di un lotto di prodotti, la cui qualità dipende dal valore della grandezza)

Si pongono due distinti problemi:

→ problema 1: qual è l'incertezza standard della media delle K misure?

→ problema 2: come stabilire se le K misure si riferiscono a cose in uno stesso stato?

Problema 1: incertezza della media di K misure

Si tratta evidentemente di calcolare l'incertezza standard di $Y = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} x_i$

Dunque non è altro che un problema di propagazione delle incertezze!

$$u^2_y = \sum_{i=1}^{K} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2_i = \sum_{i=1}^{K} \left(\frac{1}{K}\right)^2 u_i^2$$

Ipotizzando che le K misure abbiano incertezze standard tutte uguali:

$$u^2_y = \frac{u^2_i}{K}$$

Dunque in queste condizioni all'aumentare di K l'incertezza standard si riduce come $1/\sqrt{K}$

Incertezze standard e incertezze espanse

In molte applicazioni è utile poter esprimere le misure come “intervalli di indifferenza”, tali cioè che ogni elemento dell’intervallo possa essere scelto “con un’alta probabilità” come valore di riferimento per il misurando

La già citata *Guide to the expression of uncertainty in measurement* raccomanda di passare dalla rappresentazione mediante incertezze standard a quella per intervalli moltiplicando l’incertezza standard u per un fattore di copertura (*coverage factor*) k, in modo che:

$$X = [\mu - ku, \mu + ku]$$

formalizzi tale intervallo di indifferenza (chiamato incertezza espansa, tradizionalmente intervallo di confidenza)

Il grado di probabilità che si riconosce a un intervallo così ottenuto è (anche tradizionalmente) chiamato livello di confidenza

Fattori di copertura e livelli di confidenza

C’è una relazione di monotonia tra fattore di copertura e livello di confidenza:

$\uparrow$ fattore di copertura $\uparrow$ livello di confidenza

... relazione che può essere espressa analiticamente se si conosce o ipotizza la distribuzione di probabilità sottostante

Nel caso della distribuzione gaussiana:

livello di confidenza	**fattore di copertura**
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

IL problema:
come scegliere
un livello di confidenza o
un fattore di copertura
in modo adeguato
per il problema in esame ?

Naturalmente non in ogni caso la distribuzione gaussiana è quella più adeguatamente adottabile; per esempio, nel caso di incertezze di tipo B sono tipicamente preferite distribuzioni rettangolari, trapezoidali o triangolari

Problema 2: compatibilità di K misure

(come stabilire se le K misure si riferiscono a cose in uno stesso stato?)

La norma *UNI 4546 - Misure e misurazioni. Termini e definizioni fondamentali* raccomanda di formalizzare la condizione che due misure:

$$X_1 = [\mu_1 - k_1u_1, \mu_1 + k_1u_1] \text{ e } X_2 = [\mu_2 - k_2u_2, \mu_2 + k_2u_2]$$

si riferiscano a cose in uno stesso stato come:

$$X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$$

Dunque le K misure si riferiscono a cose in uno stesso stato se:

$$\bigcap_{i=1}^{K} X_i \neq \varnothing$$

... una condizione chiamata di compatibilità delle misure

Tolleranza e incertezza

Una tipica situazione operativa in cui occorre trattare con incertezze (espanse) si presenta nei casi in cui occorre confrontare la misura di un prodotto con le corrispondenti specifiche di progetto, per decidere se accettare o scartare il prodotto stesso

Le specifiche di progetto sono tipicamente fornite nella forma: valore nominale + tolleranza

Si tratta dunque di confrontare tra loro due intervalli, misura e specifiche, secondo i casi:

1. misura $\subset$ specifiche
2. misura $\cap$ specifiche $\neq \varnothing$ (ma non misura $\subset$ specifiche)
3. misura $\cap$ specifiche $= \varnothing$

La decisione: 1: accetta; 3: scarta; e nel caso 2: ?

		Stato effettivo del prodotto	
		fuori specifiche	nelle specifiche
Decisione	scarta	ok	errore di tipo 2
	accetta	errore di tipo 1	ok

* E' meglio incorrere in errori di tipo 1 o di tipo 2? Dipende dal tipo di prodotto!

* Cosa può succedere se, a parità di misura, si modificano le specifiche? e se, a parità di specifiche, si modifica l'incertezza della misura?

Misurazione, informazione, incertezza

informazione iniziale ("a priori") sul misurando	misurazione →	informazione finale ("a posteriori") sul misurando

... nella logica generale che:

↑ informazione ↓ incertezza

Per quanto la misurazione possa essere sofisticata, l'informazione che se ne ottiene non è mai "completa": rimane sempre dell'incertezza sul misurando, almeno relativamente alla definizione del misurando (<u>incertezza intrinseca</u>)