

La programmazione aggregata della produzione

Modelli ed esempi

Programmazione lineare (monoprodotto)

- Ipotesi:
 - Monoprodotto
 - Domanda prevedibile (determ.)
 - Tempi e costi di setup trascurabili
 - No backlog

Funzione obiettivo:

$$\begin{aligned} \mathit{Min}(Z) = & \sum_1^T [\mathit{m}(t) * X(t) + \mathit{i}(t) * \mathit{INV}(t)] \\ & + \sum_1^T [\mathit{r}(t) * W(t) + \mathit{s}(t) * S(t)] \end{aligned}$$

Programmazione lineare (monoprodotto)

Vincoli:

$$X(t) + INV(t-1) - INV(t) = D(t)$$

$$h(t) * X(t) = W(t) + S(t)$$

$$0 \leq W(t) \leq MAXW(t)$$

$$0 \leq S(t) \leq MAXS(t)$$

$$INV(t) \geq 0$$

Programmazione lineare (multiprodotto)

- Ipotesi
 - Multiprodotto
 - Monomacchina
 - Domanda prevedibile (deterministica)
 - Tempi di setup trascurabili
 - Setup indipendenti dalla sequenza
 - No backlog

Programmazione lineare (multiprodotto)

- Simbologia
 - $X(i,t)$ quantità da produrre di i in t
 - $C_p(t)$ capacità disponibile in t
 - $D(i,t)$ domanda del prodotto i nel periodo t
 - $e(i,t)$ eccesso di produzione vs domanda fino a t
 - $c(i,t)$ costo unitario di mantenimento a scorta
 - $a(i,t)$ costo di setup di i al periodo t
 - $k(i,t) = 0$ se non si produce, 1 se si produce

Programmazione lineare (multiprodotto)

- Funzione obiettivo

$$\begin{aligned} \text{Min}(z) = & \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T [k(i,t) \times a(i,t)] + \\ & + \sum_{i=1}^I \sum_{t=1}^T [c(i,t) \times e(i,t)] \end{aligned}$$

Programmazione lineare (multiprodotto)

- Vincoli

$$e(i, t) = \sum_{j=1}^t X(i, j) - \sum_{j=1}^t D(i, j)$$

$$e(i, t) \geq 0 \quad \forall i, \forall t \quad (\text{no backlog})$$

$$\sum_{i=1}^I X(i, t) \leq Cp(t) \quad \forall t \quad (\text{rispetto capacità})$$

Wagner - Whitin

- Ipotesi
 - Monoprodotto
 - Domanda prevedibile (deterministica)
 - Capacità infinita
 - Costo prod./acq. costante nel tempo
 - Setup solo come costi
 - No backlog

Wagner - Whitin

- Il funzionale ricorsivo

$$f_t(INV) = \text{Min} [i(t-1) * INV + \tau(X(t)) * a(t) + f_{t+1}(INV + X(t) - D(t))]$$

Wagner - Whitin

- dove

$$\tau (X (t)) = 0 , \quad \text{se } X (t) = 0 ,$$

$$\tau (X (t)) = 1 , \quad \text{se } X (t) > 0$$

con i vincoli $(\forall t)$

$$X (t) \geq 0$$

$$INV \geq 0 ,$$

$$INV + X (t) \geq D (t)$$

Il modello di Wagner-Whitin

- Esiste una soluzione ottima per la quale:

$$INV * X(t) = 0 \quad \forall t$$

Il modello di Wagner-Whitin

- Se in un periodo t si verifica che $INV=0$, allora è ottimale considerare i periodi da 0 a t indipendentemente dai successivi

$$f_{t-1}(INV) = \text{Min} [i(t-2) * INV + \tau(X(t-1)) * a(t-1) + f_t(0)]$$

$$g_{t-1}(INV) = \text{Min} [i(t-2) * INV + \tau(X(t-1)) * a(t-1)]$$

Il modello di Wagner-Whitin

- Esiste una soluzione ottima per la quale la produzione di un periodo soddisfa un numero intero di domanda di periodo per i periodi successivi
- Se la domanda di un periodo t'' è soddisfatta dalla produzione del periodo t , allora anche la domanda di t' ($t < t' < t''$) è soddisfatta dalla produzione di t .

Il modello di Wagner-Whitin

- Sintesi del modello

$$F(t) = \text{Min} [A, B] \quad \text{dove}$$

$$A = a(t) + F(t - 1)$$

$$B = \text{Min} \left[a(j) + \left(\sum_j^{t-1} \sum_{h+1}^t k i(h) D(k) \right) + F(j - 1) \right]$$

$$F(1) = a(1)$$

$$F(0) = 0$$

Il modello di Wagner-Whitin

- Se al periodo t' il minimo della relazione è ottenuto in corrispondenza di $j=t''$ con $t'' \leq t'$, allora al periodo t , con $t > t'$, è sufficiente considerare solo $t'' \leq j \leq t$.
- In particolare se $t'=t''$ è sufficiente considerare solo i programmi per cui $X(t') > 0$.

Esempio applicazione Wagner-Whitin

Mese	D(t)	a(t)	i(t)
1	69	85	1
2	29	102	1
3	36	102	1
4	61	101	1
5	61	98	1
6	26	114	1
7	34	105	1
8	67	86	1
9	45	119	1
10	67	110	1
11	79	98	1
12	56	114	1

Esempio applicazione Wagner-Whitin

Mese	1	2	3	4	5	6
a(t)	85	102	102	101	98	114
D(t)	69	29	36	61	61	26
	85	187	216	287	375	462
		114	223	277	348	401
			186			400
F(t)	85	114	186	277	348	400
Polit.	1	<u>1 2</u>	<u>1 2 3</u>	<u>12 34</u>	<u>123 45</u>	<u>123 456</u>

Politica ottima: 1,2 3,4 5,6,7 8,9 10 11,12

Il modello di Magee Boodman

- Ipotesi:
 - Multiprodotto
 - Monomacchina
 - Domanda stazionaria
 - Domanda prevedibile (deterministica)
 - Tempi di setup trascurabili
 - Setup indipendenti dalla sequenza
 - No backlog

- Concetto di Campagna:
 - In una campagna di produzione si realizzano in sequenza tutti i prodotti

Il modello di Magee Boodman

- Simbologia

- k indice di prodotto
- H giorni lavorativi annui
- $r(k)$ ritmo produttivo del prodotto k
- $D(k)$ domanda annua del prodotto k
- C_m costo unitario di mantenimento a scorta
- $p(k)$ costo variabile di produzione di k
- $a(k)$ costo di setup del prodotto k

Il modello di Magee Boodman

- Costo totale di mantenimento a scorta

$$C_{totMant} = \sum_{k=1}^K \frac{p(k) \times C_m \times D(k) \times \left(1 - \frac{D(k)}{H \times r(k)}\right)}{2 \times n_o}$$

Il modello di Magee Boodman

- Costo totale di setup

$$C_{totSetup} = n_o \times \sum_{k=1}^K a(k)$$

Il modello di Magee Boodman

- Numero ottimo di campagne

$$n_o = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^K p(k) \times Cm \times D(k) \times \left(1 - \frac{D(k)}{H \times r(k)}\right)}{2 \times \sum_{k=1}^K a(k)}}$$

Il modello di Magee Boodman

- Il lotto di produzione ad ogni campagna

$$Q_o(k) = \frac{D(k)}{n_o}$$

Limiti del modello di Magee Boodman

- Campagne degeneri
- Domanda non stazionaria
- Incertezza nelle previsioni di domanda
- Setup dipendenti dalla sequenza
- Vincoli di capacità
- Tempi di setup

Il modello di Magee Boodman

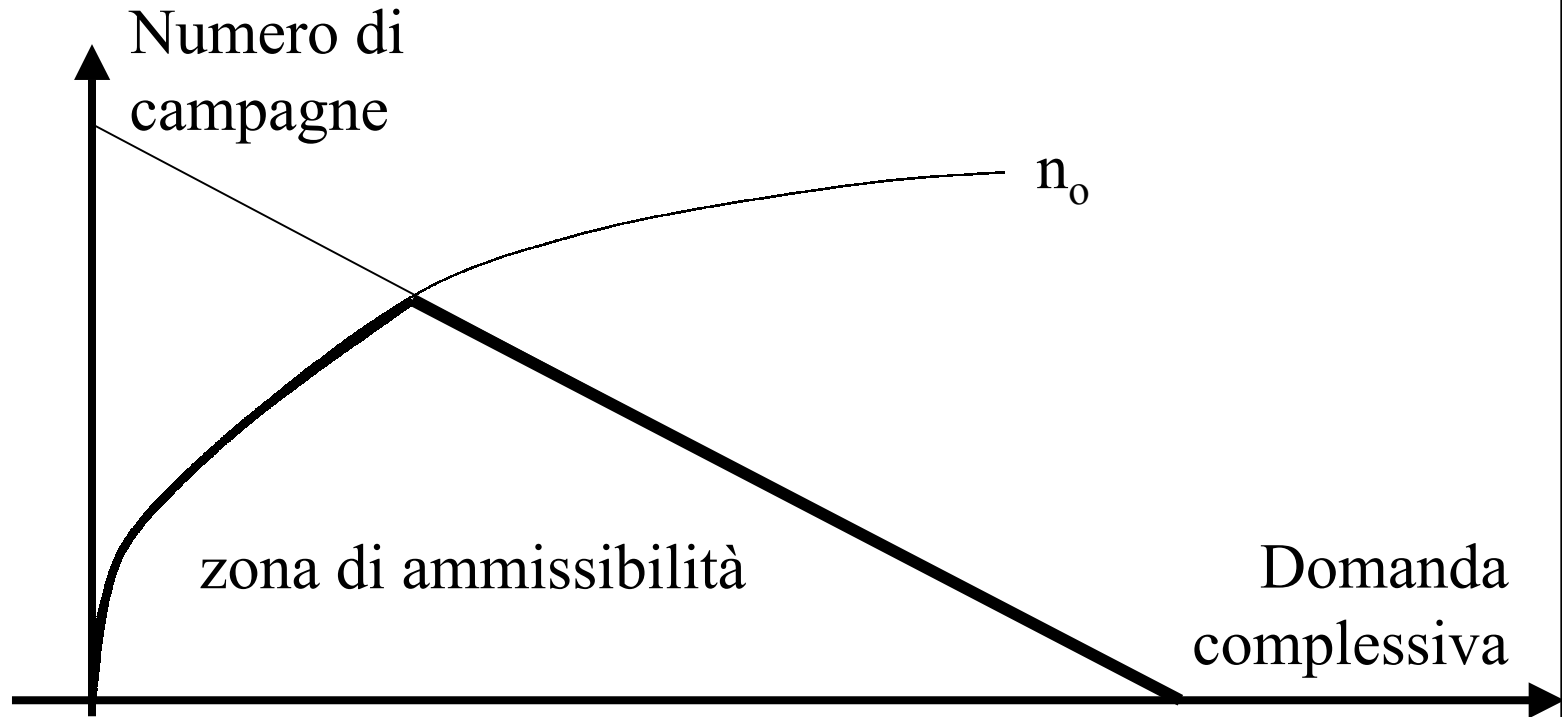
- Campagne degeneri: non sempre conviene produrre a ogni campagna prodotti con domanda limitata e costi di setup elevati:
 - si calcola il lotto economico per ciascuno di questi prodotti considerato separatamente
 - se $Q(k) \gg Q_0(k)$ si considera la possibilità di produzione a campagne alterne o occasionali
 - si valutano i costi delle varie alternative e si sceglie la soluzione a minor costo complessivo
- Domanda non stazionaria: si utilizza il modello come se la domanda fosse stazionaria:
 - anticipando il trend
 - segmentando il periodo di pianificazione

Il modello di Magee Boodman

- Incertezza nelle previsioni di domanda: si utilizzano delle opportune scorte di sicurezza
- Setup dipendenti dalla sequenza: poiché la campagna non vincola sulla sequenza, si ottimizza la sequenza a monte dell'applicazione del modello e si utilizza il costo di setup derivante da tale sequenza

Il modello di Magee Boodman

- Vincoli di capacità / tempi di setup
 - Si tiene conto di un ritmo produttivo
 - I setup sottraggono tempo alla produzione



Euristico per la programmazione operativa

- Si basa su R_k , rapporto tra la scorta massima e la scorta media del ciclo

$$SCMax = Q'_o(k) = \frac{D(k)}{n_o} \times \left(1 - \frac{D(k)}{H \times r(k)} \right)$$

$$SCMed = \sum_{k=1}^K \frac{Q'_o(k)}{2}$$

Euristico per la programmazione operativa

- Da cui

$$R(k) = \frac{2 \times D(k) \times \left(1 - \frac{D(k)}{H \times r(k)} \right)}{\sum_{k=1}^K D(k) \times \left(1 - \frac{D(k)}{H \times r(k)} \right)}$$

Euristico per la programmazione operativa

- Procedura:
 - si calcola una tantum $R(k)$ in occasione del calcolo di n_0
 - si monitorizza il rapporto tra $R'(k)$, fra la scorta istantanea del prodotto k e la scorta media
 - quando $R'(k)$ raggiunge $R(k)$ si arresta la produzione del prodotto k e si passa a produrre il prodotto per il quale è più basso il rapporto tra scorta istantanea e consumo nell'unità di tempo
 - NB. Si può perdere ottimizzazione sequenze

Il modello di Karni-Roll

- Ipotesi
 - Multiprodotto
 - Domanda di forma qualsiasi
 - Domanda nota deterministicamente
 - Ci sono limiti di capacità produttiva
 - Setup da considerare come costi
 - Non è ammesso backlog

Il modello di Karni-Roll

Prodotti	1	2	3	4
A	100	50 →	30	70
B	60 ←	70	60	20
C		70	40	60
Totale	160	190	130	150
Capacità	170	170	160	160

Il modello di Karni-Roll

Prodotti	1	2	3	4
A	100	40	40	70
B	70	60	60	20
C		70	40	60
Totale	170	170	140	150
Capacità	170	170	160	160

Il modello di Karni-Roll

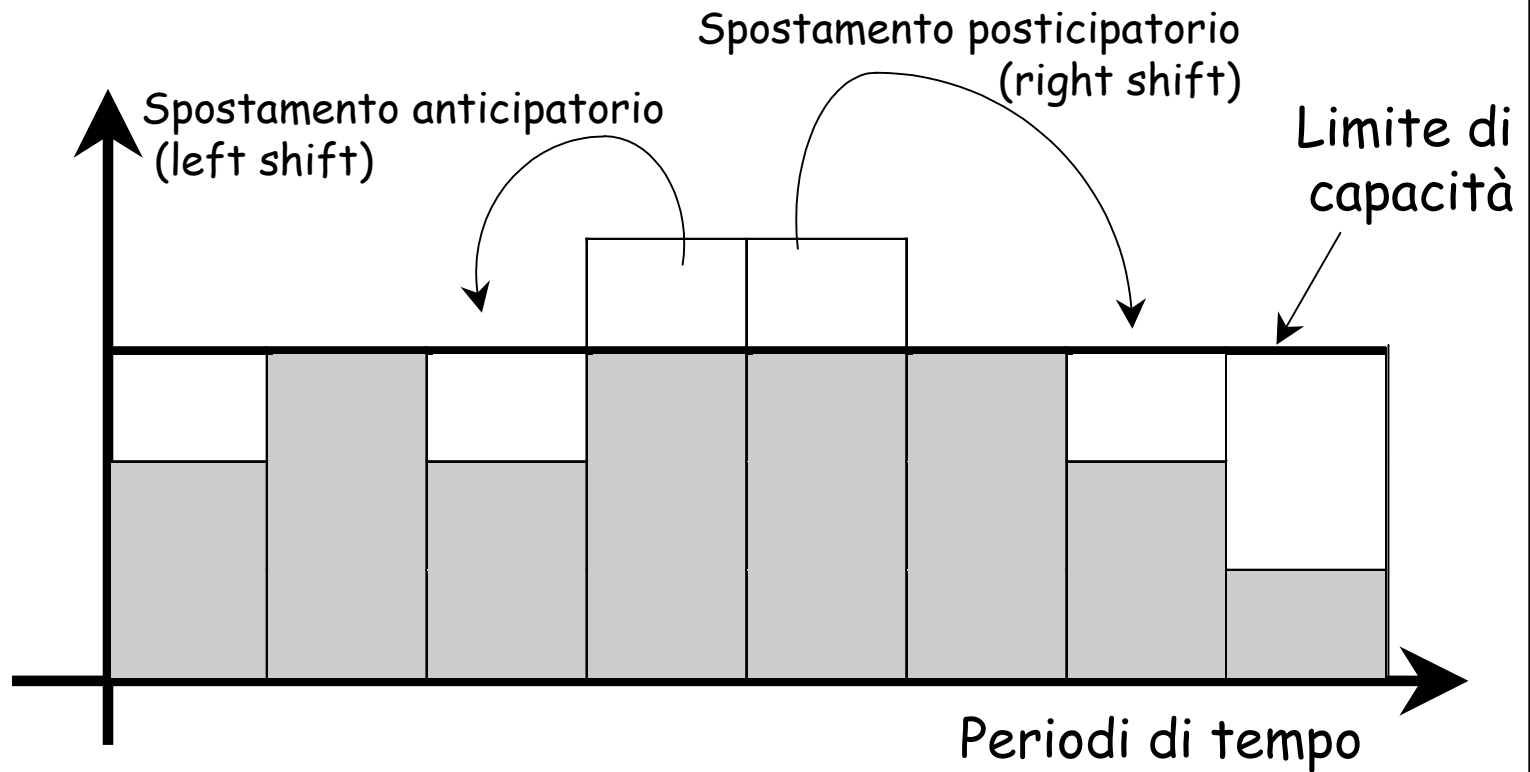
- la formulazione analitica è del tutto simile a quella di PL intera, ma il metodo risolutivo è euristico
 - non fornisce la migliore soluzione possibile, dato l'obiettivo e i vincoli, ma una soluzione “ragionevolmente buona” ...
 - ... per contro è maggiormente applicabile in pratica

Il modello di Karni-Roll

- La procedura di funzionamento:
 - si parte dalla soluzione offerta dall'algoritmo di Wagner-Whitin (EOQ dinamico)
 - tale soluzione è il limite inferiore del costo, in quanto effettua un caricamento a capacità infinita
 - se tale soluzione è fattibile, l'algoritmo termina
 - se tale soluzione è infattibile ...
 - il vincolo di capacità produttiva è violato in uno o più periodi
 - ... l'algoritmo cerca una soluzione ammissibile effettuando degli spostamenti (shift) di quantità da un periodo all'altro dell'orizzonte

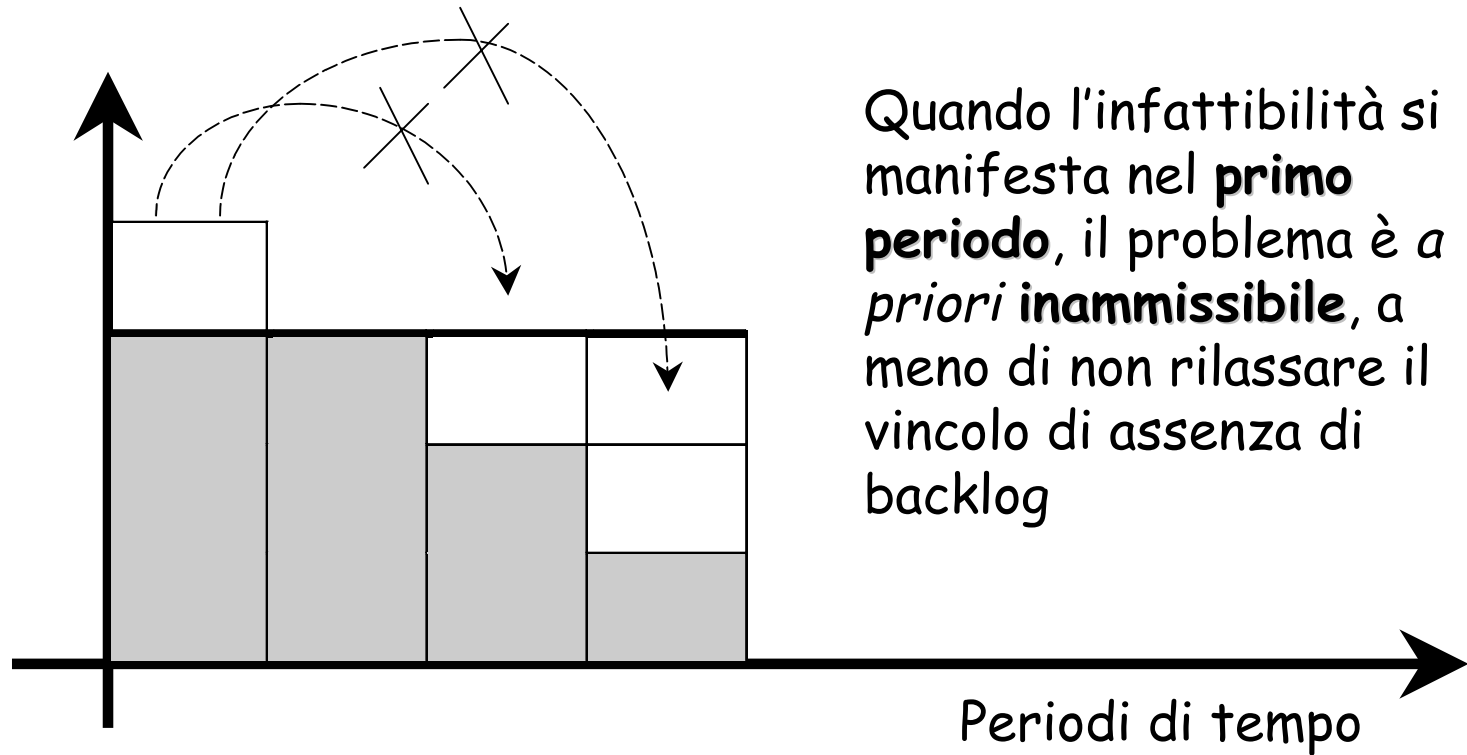
Il modello di Karni-Roll

- Il concetto di shift:



Il modello di Karni-Roll

- Nota bene:



Il modello di Karni-Roll

- **Caratteristiche degli shift:**
 - dimensione, ossia la quantità che deve essere spostata
 - direzione, ossia il numero di periodi (a destra o a sinistra) di cui si effettua lo spostamento
- **Obiettivi degli shift:**
 - eliminazione dell'infattibilità al minimo costo
 - riduzione del costo complessivo del piano ...
 - costo totale di setup e costo totale di mantenimento a scorta
 - ... attraverso modifiche della matrice del piano

Il modello di Karni-Roll

- Regole degli shift:
 - spostare la minor quantità possibile per eliminare le infattibilità
 - spostare la maggior quantità possibile per ridurre il costo di mantenimento
 - spostare tutta la quantità possibile per:
 - eliminare un setup
 - ridurre il costo di mantenimento senza generare nuovi setup
 - spostare a destra (posticipare) la maggior quantità possibile senza generare infattibilità
 - spostare a sinistra (anticipare) la minor quantità possibile senza generare infattibilità

Il modello di Karni-Roll

- L'effetto di ciascuno shift si valuta in termini di riduzione del costo del piano (ridC) e sovrapponendo gli effetti.
- In simboli, considerando il singolo shift ...
 - quindi riferendosi ad un assegnato prodotto, oggetto dello shift (per il quale si è omissso l'indice):

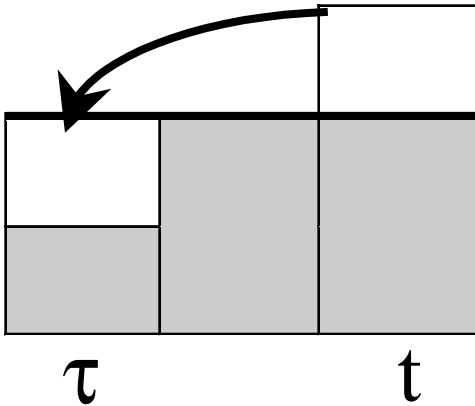
$$\text{ridC} = \text{Mant}(i) \cdot \text{QuantShift} \cdot (\tau - t) + k \cdot a(i)$$

Il modello di Karni-Roll

quantità spostata (pezzi o
frazione della capacità)

Moltiplicatore di creazione
o eliminazione di un setup
 $k \in \{-1;0;+1\}$

$$\text{ridC} = \text{Mant}(i) \cdot \text{QuantShift} \cdot (\tau - t) + k \cdot a(i)$$



periodo “di partenza”
della quantità spostata

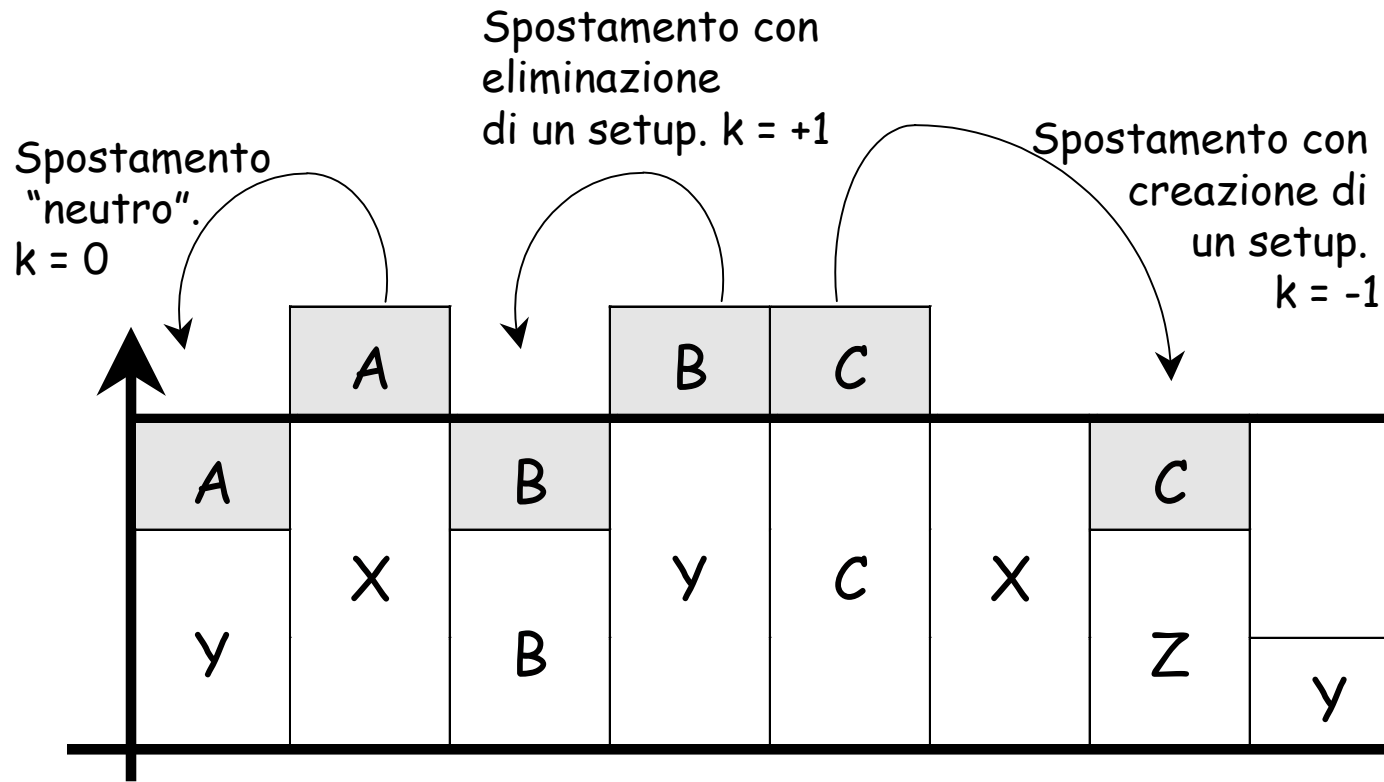
periodo “di destinazione”
della quantità spostata

Il modello di Karni-Roll

- Osservazioni:
 - $ridC$ rappresenta la diminuzione del costo totale del piano dovuta allo shift ...
 - quindi per esempio, quando si sposta a sinistra (indietro nel tempo; cioè $t > \tau$), il costo di mantenimento aumenta e dunque $ridC$ è positivo
 - il moltiplicatore k può assumere tre valori:
 - -1 quando si “crea” un setup, per esempio spostando parte di un lotto e nel periodo destinazione c’è un altro prodotto
 - 1 quando si “elimina” un setup, per esempio spostando un lotto intero e nel periodo destinazione c’è lo stesso prodotto
 - 0 in caso “neutro”

Il modello di Karni-Roll

- Esempi:

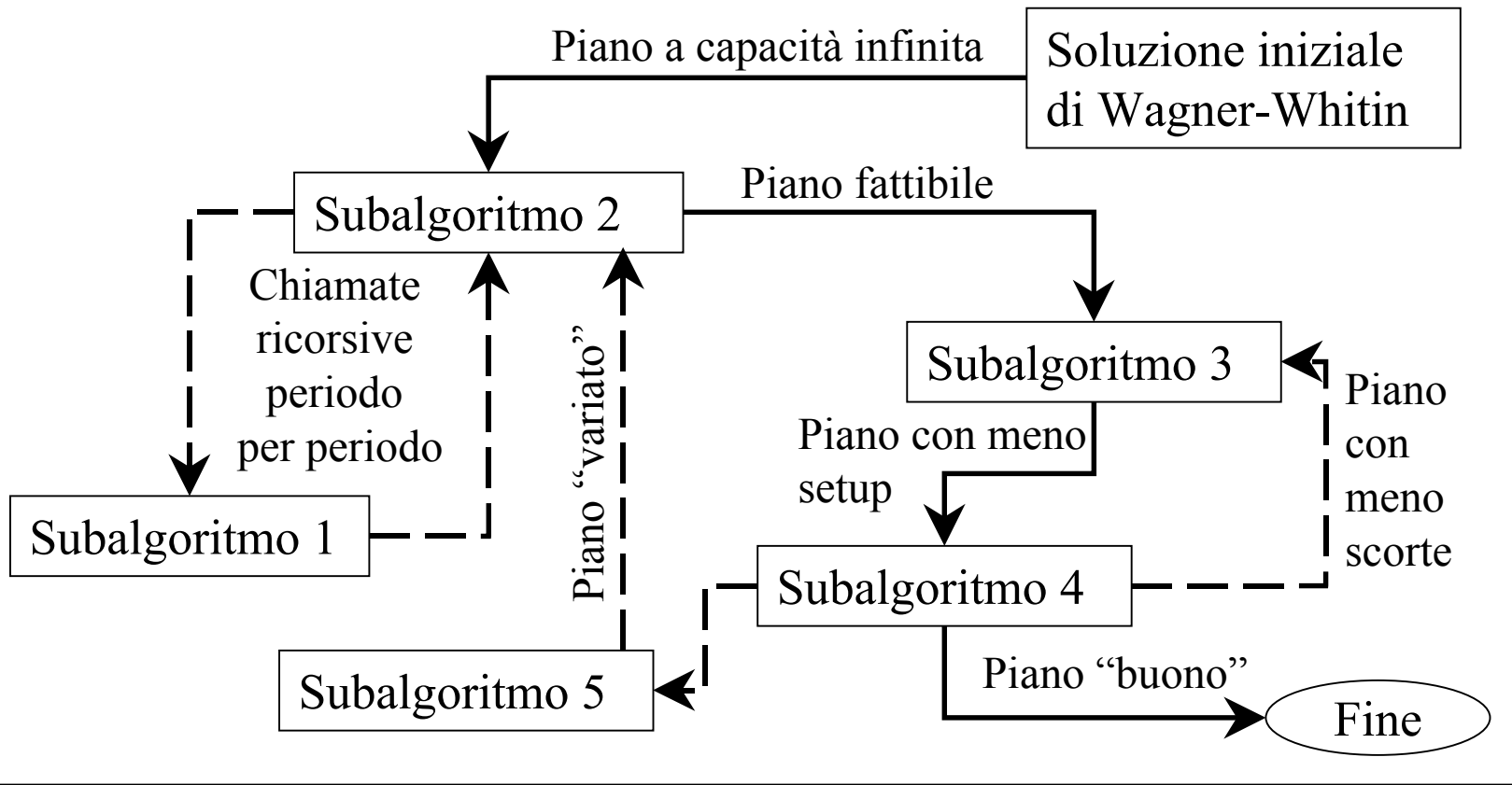


Il modello di Karni-Roll

- Gli shift contenuti in 5 subalgoritmi:
 - subalgoritmo 1: elimina tutte le infattibilità tra il periodo 1 e un periodo τ qualsiasi ($\tau > 1$)
 - subalgoritmo 2: elimina tutte le infattibilità di una data soluzione (applicando ricorsivamente il subalgoritmo 1)
 - subalgoritmo 3: riduce i costi di setup con shift verso sinistra (accorpando i lotti)
 - subalgoritmo 4: riduce i costi di mantenimento con shift verso destra (pianificando “al più tardi”)
 - dopo ogni shift richiama il subalgoritmo 3
 - subalgoritmo 5: perturba la soluzione

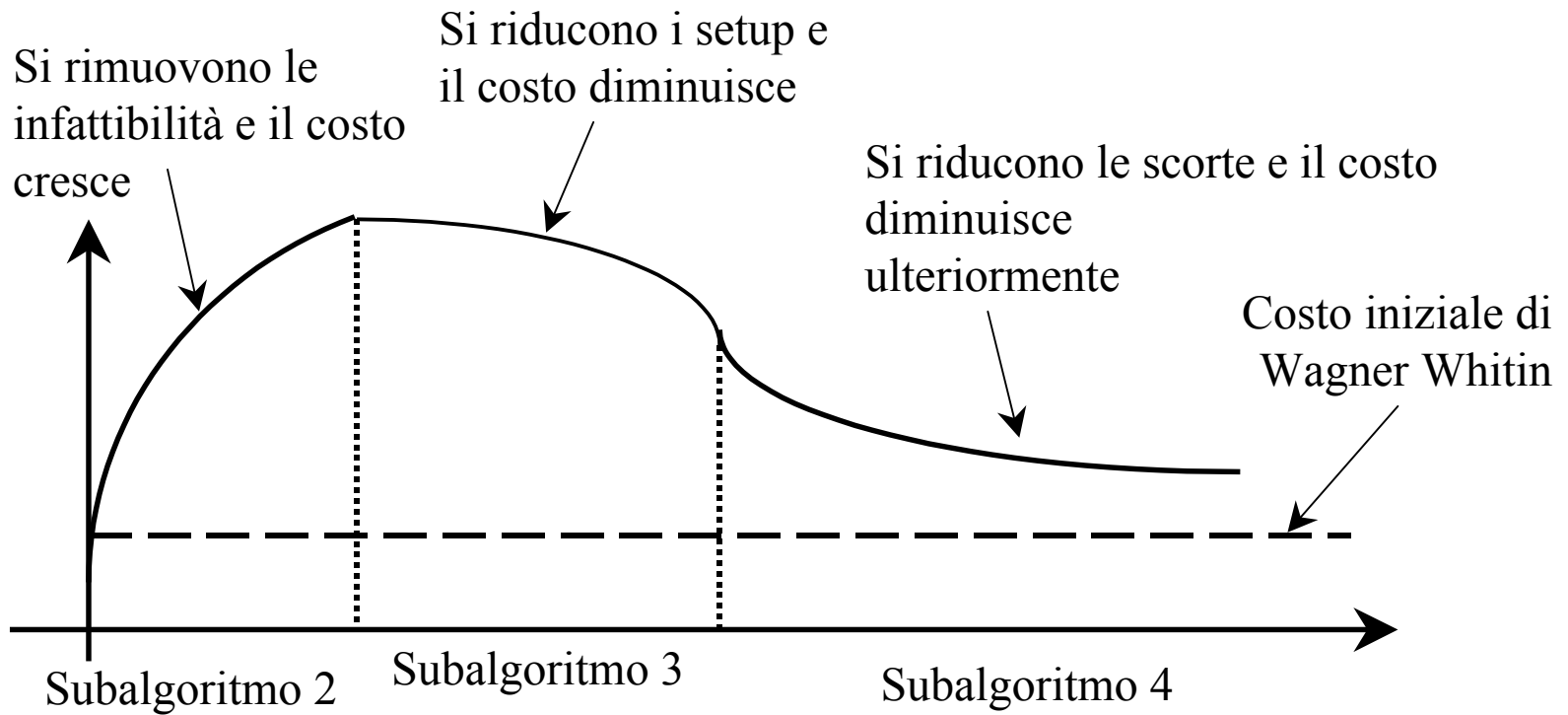
Il modello di Karni-Roll

- Il flusso ...



Il modello di Karni-Roll

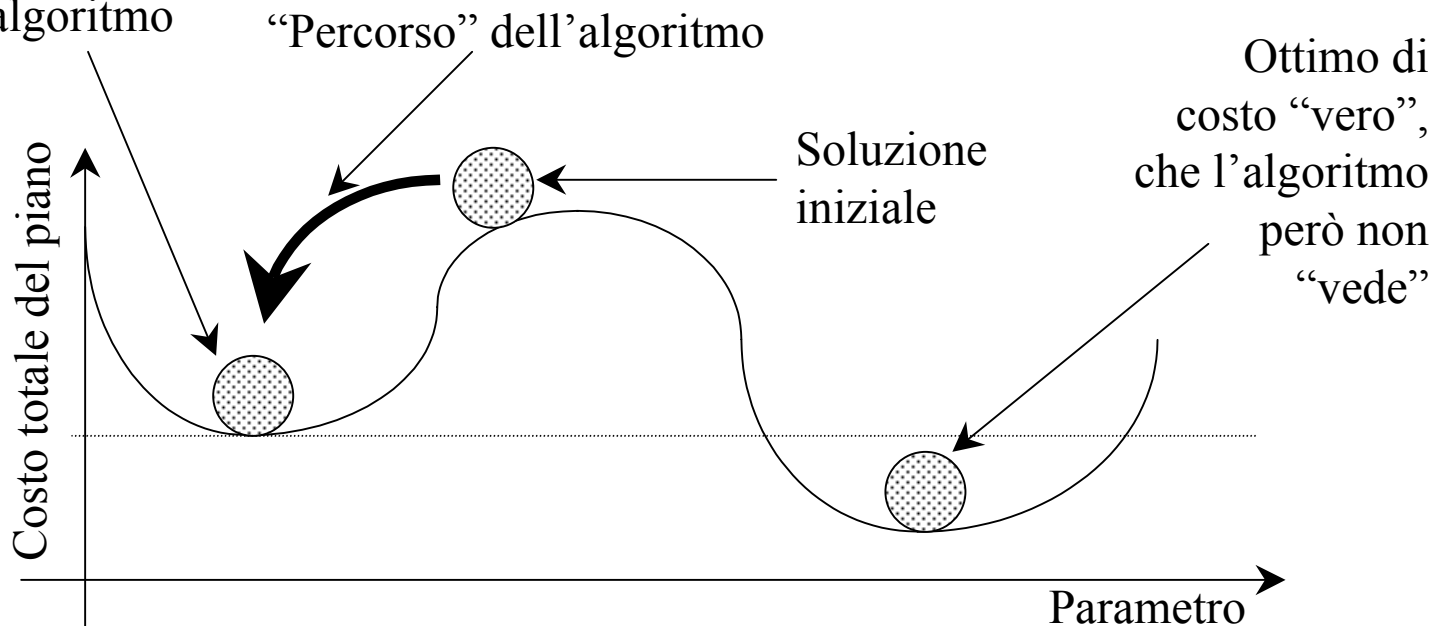
- Andamento “tipico” del costo totale al procedere dell’algoritmo



Il modello di Karni-Roll

- Il subalgoritmo 5 serve a ridurre il rischio di porsi in minimi locali

Soluzione trovata dall'algorithm



Il modello di Karni-Roll

- Vantaggi e svantaggi del modello:
 - è assai più efficiente del modello di PL intera
 - la funzione obiettivo peggiora di circa l'1% a fronte di una riduzione del tempo di elaborazione di circa 140 volte
 - l'elaborazione è comunque piuttosto complessa
 - vi sono molti subalgoritmi che “ricircolano”
 - il tempo di elaborazione resta comunque piuttosto “lungo”
 - comunque non si tengono in considerazione i tempi di setup
 - una soluzione potrebbe risultare ulteriormente infattibile una volta introdotti il trade-off tra produzione e setup

Il modello di Karni-Roll

- Vantaggi e svantaggi del modello:
 - le prestazioni sono molto influenzate dallo shift factor (SF),
 - ossia dal rapporto tra il costo di setup e il costo di mantenimento:

$$SF = \frac{SU}{Mant}$$

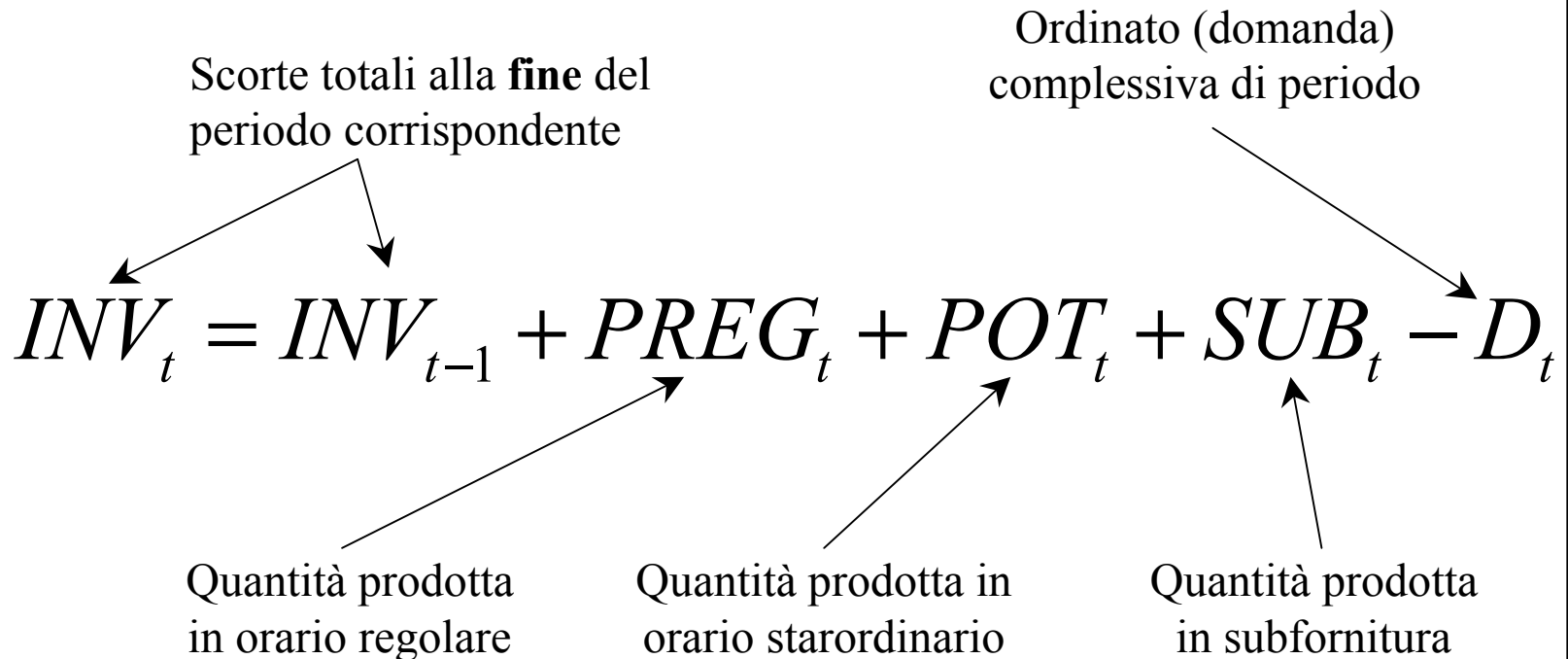
- Per shift factor **bassi**
 - il costo di mantenimento è prevalente su quello di setup
- la soluzione di partenza di Wagner Whitin è poco significativa
 - banalmente si colloca la produzione nel periodo in cui si manifesta la domanda
- Per shift factor alti, le prestazioni del modello risultano complessivamente “scarse”
 - una volta introdotti i setup (che non sono considerati nel modello) il vincolo di capacità potrebbe risultare comunque violato

Il modello di Aucamp

- Ipotesi
 - Multiprodotto
 - Domanda di forma qualsiasi
 - Domanda nota deterministicamente
 - Ci sono limiti di capacità produttiva
 - Considerati straordinari e subfornitura
 - Setup da considerare come tempi
 - Non è ammesso backlog
 - Euristico

Il modello di Aucamp

- Bilancio dei materiali:



Il modello di Aucamp

- Bilancio della manodopera:

Addetti disponibili durante
il periodo corrispondente

$$WORKERS_t = WORKERS_{t-1} + HIRE_t - FIRE_t$$

Numero di nuovi assunti
all'inizio del periodo

Numero di addetti che
lasciano il servizio

Il modello di Aucamp

- Legame produzione - tempo:

$$MHPREG_t = TIME \cdot PREG_t$$

Ore uomo dedicate
alla produzione in
orario regolare

Tempo standard di
lavorazione unitario (h/pz)

$$MHPOT_t = TIME \cdot POT_t$$

Ore uomo dedicate alla produzione
in orario straordinario

*Nota bene:
MHPREG e MHPOT
non includono
(ovviamente) i tempi
di setup*

Il modello di Aucamp

- Vincoli aggiuntivi sui setup:

$$MHPREG_t + SUREG_t \leq HOURS_t \cdot WORKERS_t$$

Ore totali disponibili **in orario regolare** per operatore

Ore uomo dedicate alla **produzione** in orario regolare

Ore uomo dedicate al **setup** in orario regolare

Il modello di Aucamp

- Vincoli aggiuntivi sui setup:

Rapporto di straordinario della manodopera (al più 0,3)

Ore totali disponibili **in orario regolare** per operatore

$$MHPOT_t + SUOT_t \leq f_t \cdot HOURS_t \cdot WORKERS_t$$

Ore uomo dedicate alla produzione in orario **straordinario**

Ore uomo dedicate al setup in orario **straordinario**

Il modello di Aucamp

- La funzione obiettivo
 - consiste nella minimizzazione dei costi totali attualizzati relativi a tutto l'orizzonte di pianificazione

$$\min(Z) = \sum_{t=1}^T \frac{\text{COST}_t}{(1+i)^t}$$

Il modello di Aucamp

- La funzione di costo:

Costo di assunzione e addestramento
di ogni nuovo addetto

Costo di licenziamento
di ogni nuovo addetto

$$COST_t = C_{HIRE} \cdot HIRE_t + C_{FIRE} \cdot FIRE_t + C_{SUB} \cdot SUB_t + WAGES_t + C_{MAT} (PREG_t + POT_t)$$

Costo unitario
di subfornitura

Salario della
manodopera
impegnata

Costo unitario **variabile**
diretto (materiali,
energia ecc.)

Il modello di Aucamp

- Il costo della manodopera (WAGES):

$$\begin{aligned}
 WAGES_t = & C_{REG} \cdot HOURS_t \cdot WORKERS_t + \\
 & + C_{OT} \underbrace{(MHPOT_t + SUOT_t)}
 \end{aligned}$$

Costo orario per addetto in orario regolare

Costo per ogni ora di straordinario lavorata

Ore dedicate alla produzione e al setup in orario straordinario

Il modello di Aucamp

- Osservazioni sul costo della manodopera:
 - la manodopera è considerata come un a risorsa molto rigida in orario regolare
 - in straordinario, il costo della manodopera è invece proporzionale alle ore effettivamente lavorate
 - i costi della manodopera nei due orari sono differenziati
 - si può considerare indirettamente la perdita di efficienza in straordinario ecc.

Il modello di Aucamp

- Osservazioni generali sul modello:
 - il setup è considerato NON attraverso un costo esplicito, ma come sottrazione di capacità
 - i vincoli aggiuntivi impongono che le ore totali disponibili siano assegnate o alla produzione o al setup
 - il costo di mantenimento NON è una voce esplicita, ma è tradotto dal tasso barriera
 - in questo modo si considerano anche i costi accessori di mantenimento (obsolescenza ecc.)
- Fino a questo punto la struttura del modello è rigorosamente di PL ...

Il modello di Aucamp

- Introduciamo ora la dimensione del lotto
 - standard $Q(i)$, per ogni prodotto
 - “perturbata” $Q_t(i)$,

$$Q_t(i) = k_t \cdot Q(i)$$

Moltiplicatore del lotto



Il moltiplicatore del lotto

- è un “vettore” di variabili, una per ogni periodo dell’orizzonte di pianificazione
- deve essere determinato accanto alle tre variabili per periodo (PREG, POT e SUB)
- riflette la politica di *lot sizing* dell’azienda

Il modello di Aucamp

- Equazione di bilanciamento addizionale di lot sizing: si impone che la giacenza media (MINV) effettivamente sia superiore alla somma delle scorte di sicurezza e della metà del lotto

$$MINV_t \geq \sum_i \left(SS_i + \frac{1}{2} Q_t(i) \right)$$

$$MINV_t = \frac{1}{2} (INV_t + INV_{t-1})$$

Il modello di Aucamp

- Vincoli ulteriori sulle ore di setup:

$$SUREG_t = \frac{SUTPU \cdot PREG_t}{k_t}$$

Ore uomo totali
dedicate ai setup in
orario **regolare**

Tempo medio di setup per unità
di prodotto (è un **termine noto**
calcolato sul lotto standard)

Ore uomo totali
dedicate ai setup in
orario **straordinario**

$$SUOT_t = \frac{SUTPU \cdot POT_t}{k_t}$$

Il modello di Aucamp

- Il termine SUTPU (set-up per unit) si può **stimare** come:

$$SUTPU = \frac{\sum_{i,t} SUT(i) \cdot \frac{D_t(i)}{Q(i)}}{\sum_{i,t} D_t(i)}$$

Tempo standard unitario di setup (dato tecnico)

Numero totale di lotti lanciati

Ore totali di setup

Domanda totale (ovvero produzione totale)

Il modello di Aucamp

- Estensioni del modello:
 - si può considerare la possibilità di effettuare consegne differite nel tempo (backlog, bakorder):
 - il bilancio dei materiali diventa:

$$INV_t - BO_t = INV_{t-1} + PREG_t + POT_t + SUB_t - D_t - BO_{t-1}$$

- parallelamente si modifica anche la funzione di costo:

$$COST_t = C_{HIRE} \cdot HIRE_t + \dots + C_{MAT} (PREG_t + POT_t) + C_{Bo} \cdot BO_t$$

Il modello di Aucamp

- Estensioni del modello:

- si può introdurre una limitazione alla giacenza

- per esempio per considerare la limitata potenzialità ricettiva dei magazzini

$$INV_t \leq MAXINV$$

- si può introdurre una subfornitura differenziata per tener conto che alcuni terzisti hanno costi inferiori a altri, ma limiti di capacità

$$C_{SUB-1} < C_{SUB-2}$$

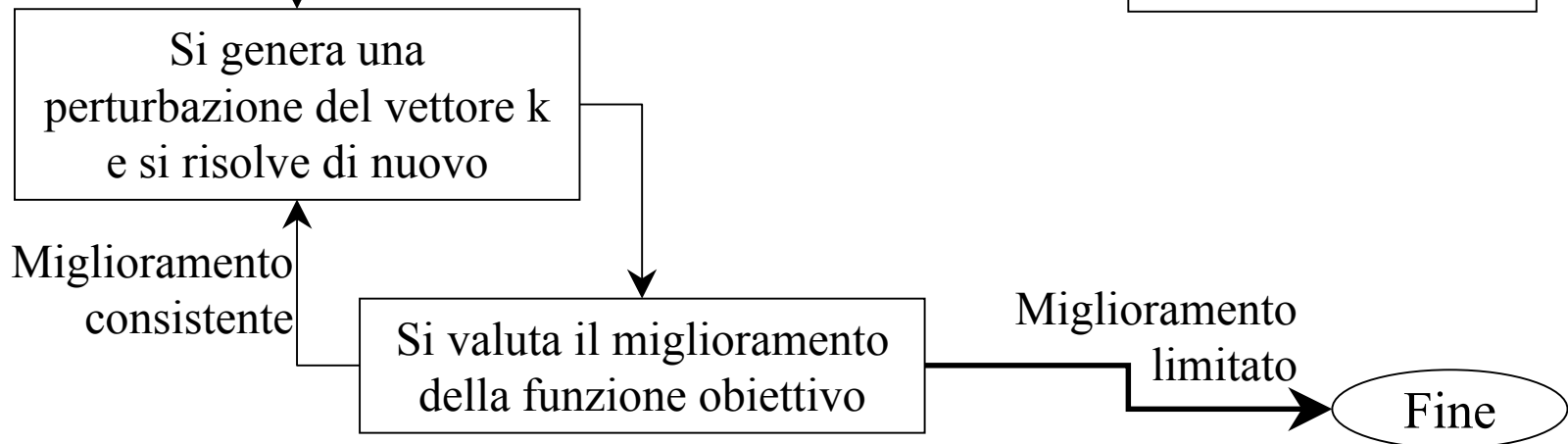
$$SUB-1_t \leq MAXSUB$$

$$C_{SUB-1} \cdot SUB_1 + C_{SUB-2} \cdot SUB_2$$

Il modello di Aucamp

- Funzionamento della procedura:
 - il modello è strutturalmente di PL, a meno dei termini di perturbazione del lotto (k), quindi:

Soluzione iniziale
di PL con $k=1$ per
tutti i prodotti



Il modello di Aucamp

- Considerazioni conclusive
 - la particolarità del modello risiede nella gestione del setup
 - come riduzione della capacità in termini quantitativi
 - come costo di mancata produzione implicito in termini di funzione obiettivo
 - tuttavia:
 - i costi “vivi” di setup non sono rappresentati
 - il tempo di setup è comunque indipendente dalla sequenza
 - il costo di mantenimento a scorta è solo costo opportunità