

Modelli dinamici

Gianmaria Martini

Introduzione

In caso di scelte ripetute infinite volte, le imprese possono legare il prezzo o la quantità del periodo t al prezzo o alla quantità del periodo $t + 1$, e anche ai periodi successivi. In tal modo possono segnalare ai rivali che desiderano alzare il prezzo, oppure praticare il prezzo di monopolio; ancora, possono spingere i rivali a ridurre la pressione concorrenziale, costruirsi una reputazione in merito ai comportamenti di mercato, ecc. In tal modo possono ottenere profitti anche superiori a quelli di equilibrio nei modelli statici.

Vedremo che le imprese, sia che competano alla Cournot sia che competano alla Bertrand, hanno la possibilità di coordinarsi in modo tale da ottenere soluzioni simili a quelle ottenute mediante la formazione di un cartello. Tale coordinamento prende il nome di **collusione tacita**. Questo avviene però per mezzo di **strategie indipendenti**, quindi basandosi solo sulla coscienza dell'interazione strategica e sulla **convenienza a non entrare in una eccessiva competizione**.

Un risultato cruciale per dimostrare l'esistenza di collusione tacita è il Folk Theorem. Esso dimostra che:

- se il fattore di sconto δ è sufficientemente elevato, quindi se i profitti futuri hanno una notevole importanza al momento in cui le decisioni strategiche vengono prese,
- e se in equilibrio le imprese che partecipano al supergioco riescono ad ottenere incrementi paretiani in termini di profitti rispetto alla soluzione di Nash del gioco statico,

allora esiste un equilibrio perfetto nei sottogiochi che prevede l'utilizzo di strategie con mosse in ogni periodo diverse da quelle utilizzate nell'equilibrio di Nash del gioco statico.

Collusione tacita in caso di competizione sulla quantità

Supponiamo che esistano due imprese, 1 e 2. Le funzioni del profitto delle due imprese sono le seguenti

```
[ > restart;  
[ > pi1:=(100-b*(y1+y2))*y1-c*y1;  
[                                      $\pi_1 := (100 - b(y_1 + y_2))y_1 - c y_1$   
[ > pi2:=(100-b*(y1+y2))*y2-c*y2;  
[                                      $\pi_2 := (100 - b(y_1 + y_2))y_2 - c y_2$   
[ in caso di gioco statico esse ottengono i profitti connessi all'equilibrio di Cournot, quindi  
[ > cpoy1:=diff(pi1,y1);  
[                                      $cpoy_1 := -b y_1 + 100 - b(y_1 + y_2) - c$   
[ > cpoy2:=diff(pi2,y2);
```

```

[ cpy2 := -b y2 + 100 - b (y1 + y2) - c
> output:=solve({cpy1,cpy2}, {y1,y2});
      output := {y1 = -\frac{1}{3} \frac{-100 + c}{b}, y2 = -\frac{1}{3} \frac{-100 + c}{b}}
[ > assign(output);
> pi1:=simplify(pi1);
      \pi1 := \frac{1}{9} \frac{(-100 + c)^2}{b}
[ > pi2:=simplify(pi2);
      \pi2 := \frac{1}{9} \frac{(-100 + c)^2}{b}

```

Strategie di intervento (trigger strategies) nel supergioco

Supponiamo che le imprese adottino delle strategie di intervento nel supergioco. Esse prevedono di iniziare nel primo periodo con la produzione ciascuna di metà dell'output di monopolio, e di continuare a produrlo se

- IN TUTTI i periodi precedenti il generico periodo t l'impresa rivale ha prodotto la metà dell'output di monopolio,
- oppure, in caso di deviazione, di produrre PER SEMPRE, l'output dell'equilibrio di Cournot.

L'output di monopolio è dato da

```

[ > pi:=(100-b*y)*y-c*y;
      \pi := (100 - b y) y - c y
[ > y:=solve(diff(pi,y),y);
      y := -\frac{1}{2} \frac{-100 + c}{b}
[ mentre il profitto in caso di monopolio è dato da
[ > pim:=simplify(pi);
      pim := \frac{1}{4} \frac{(-100 + c)^2}{b}

```

pertanto ogni impresa produrrà la metà di tale output.

Occorre verificare che:

- non sia ottimale deviare se il rivale non ha deviato
- se il rivale ha deviato la punizione prevista sia credibile

Se il rivale non devia e l'impresa 1 non devia, quest'ultima ottiene

> **v1nd:=pim/(2*(1-delta));**

$$v1nd := \frac{1}{4} \frac{(-100 + c)^2}{b(2 - 2\delta)}$$

se invece devia l'impresa 1 ottiene il profitto massimo di deviazione nel primo periodo, dato dalla soluzione del seguente problema

> **pi1d:=(100-b*(y1d+y/2))*y1d-c*y1d;**

$$pi1d := \left(100 - b \left(y1d - \frac{1}{4} \frac{-100 + c}{b} \right) \right) y1d - c y1d$$

> **y1d:=solve(diff(pi1d,y1d),y1d);**

$$y1d := -\frac{3}{8} \frac{-100 + c}{b}$$

> **pi1d:=simplify(pi1d);**

$$pi1d := \frac{9}{64} \frac{(-100 + c)^2}{b}$$

ed il profitto di Cournot in tutti i rimanenti periodi, dato da

> **punizione:=(delta/(1-delta))*pi2;**

$$punizione := \frac{1}{9} \frac{\delta (-100 + c)^2}{(1 - \delta) b}$$

quindi in caso di deviazione quando il rivale non ha deviato il profitto scontato è dato da

> **v1dev:=pi1d+punizione;**

$$v1dev := \frac{9}{64} \frac{(-100 + c)^2}{b} + \frac{\frac{1}{9} \delta (-100 + c)^2}{(1 - \delta) b}$$

pertanto non deviare dall'accordo implicito è ottimale se

> **v1nd>=v1dev;**

$$\frac{9}{64} \frac{(-100 + c)^2}{b} + \frac{\frac{1}{9} \delta (-100 + c)^2}{(1 - \delta) b} \leq \frac{1}{4} \frac{(-100 + c)^2}{b(2 - 2\delta)}$$

e quindi se, risolvendo per δ

> **solve(v1nd>=v1dev,delta);**

$$\frac{9}{17}$$

pertanto occorre che $\frac{9}{17} \leq \delta$ e che $\delta \leq 1$. Sostituendo alcuni dati otteniamo

> **data:=[b=2,c=4];**

$$data := [b = 2, c = 4]$$

```
> v11nd:=subs(data,v1nd);
```

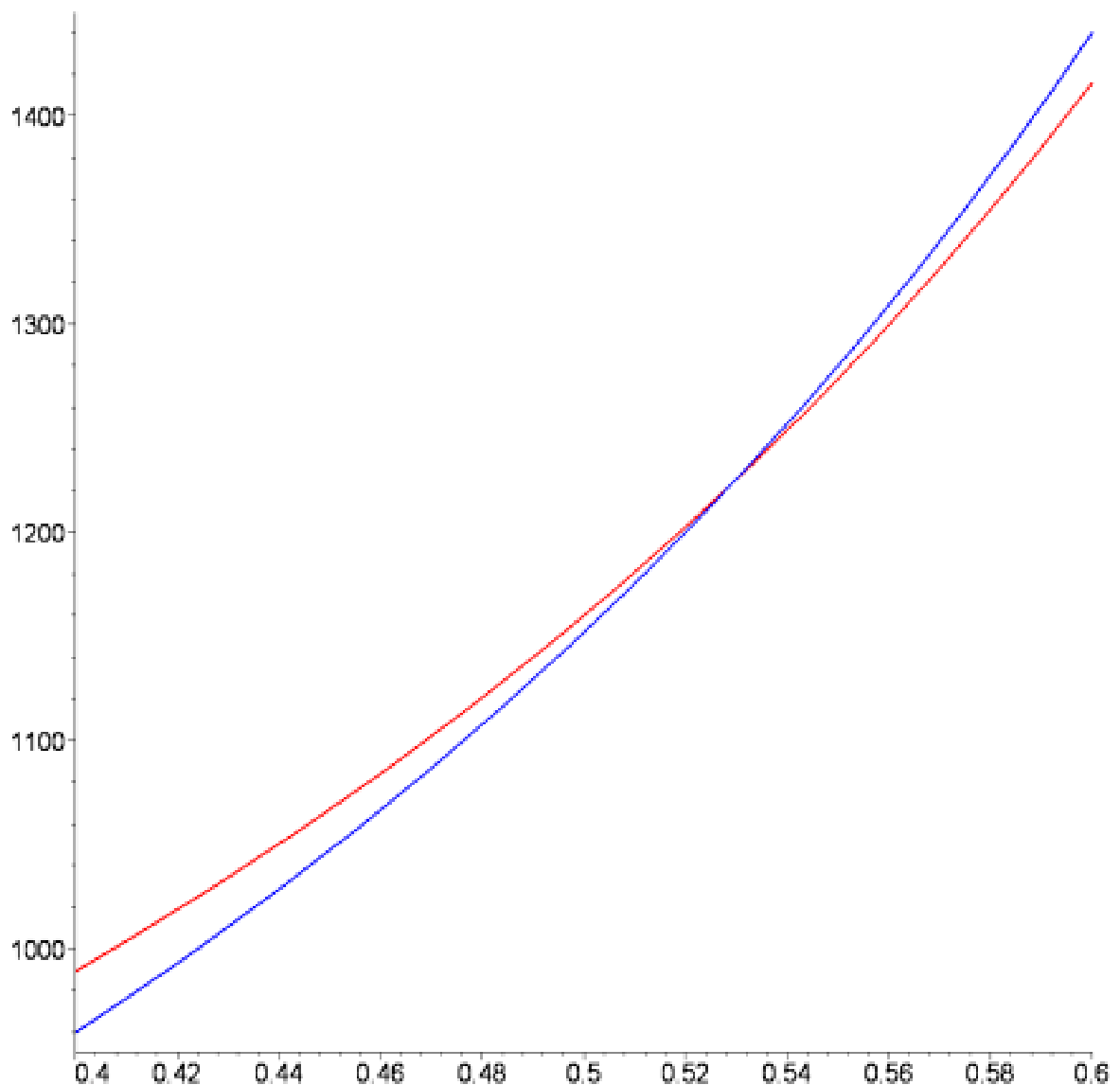
$$v11nd := 1152 \frac{1}{2 - 2\delta}$$

```
> v11dev:=subs(data,v1dev);
```

$$v11dev := 648 + \frac{512\delta}{1 - \delta}$$

Possiamo confrontare graficamente le due sequenze scontate di profitti, ed osservare che colludere tacitamente conviene solo se il fattore di sconto raggiunge un certo livello.

```
> plot([v11nd,v11dev], delta=0.4..0.6, color=[blue,red],  
thickness=3);
```



Essendo imprese simmetriche la stessa condizione vale per l'impresa 2 (se le imprese non fosse simmetriche avremmo due valori di δ e quello compatibile con un equilibrio perfetto nei sottogiochi sarebbe dato dal valore piu' alto tra i due δ).

Se l'altra impresa ha deviato nel periodo $t - 1$ giocare l'equilibrio di Cournot è un equilibrio di Nash in quel sottogioco ed è pertanto una mossa credibile. Le imprese quindi

colludono tacitamente ed ottengono un profitto uniperiodale dato da

> **pim/2;**

$$\frac{1}{8} \frac{(-100 + c)^2}{b}$$

mentre nell'equilibrio di Cournot il profitto è dato da

> **pi1;**

$$\frac{1}{9} \frac{(-100 + c)^2}{b}$$

Colludere tacitamente consente in ogni periodo del supergioco di ottenere un profitto più elevato rispetto all'equilibrio di Cournot.

Collusione tacita in caso di competizione sui prezzi

Se le imprese competono sui prezzi l'equilibrio del gioco statico (in assenza di vincoli di capacità produttiva) è dato dalla soluzione di Bertrand, in cui entrambe le imprese praticano un prezzo uguale al costo marginale (se sono simmetriche) e realizzano profitti normali. Pertanto l'equilibrio di Bertrand prevede $p_1 = p_2$ ed entrambi pari a c , la quantità prodotta da ciascuna

impresa è pari a $\frac{100 - c}{2b}$, ed i profitti sono pari a 0.

Se le imprese potessero colludere tacitamente praticerebbero il prezzo di monopolio, dato dalla soluzione del seguente problema

> **pi:=(100/b-p/b)*p-c*(100/b-p/b);**

$$\pi := \left(100 \frac{1}{b} - \frac{p}{b}\right)p - c \left(100 \frac{1}{b} - \frac{p}{b}\right)$$

> **cpop:=diff(pi,p);**

$$cpop := -2 \frac{p}{b} + \frac{100}{b} + \frac{c}{b}$$

> **pm:=solve(cpop,p);**

$$pm := 50 + \frac{1}{2}c$$

> **ym:=simplify(100/b-pm/b);**

$$ym := -\frac{1}{2} \frac{-100 + c}{b}$$

> **pim:=simplify((100/b-pm/b)*pm-c*(100/b-pm/b));**

$$pim := \frac{1}{4} \frac{(-100 + c)^2}{b}$$

> **pim/2;**

$$\frac{1}{8} \frac{(-100 + c)^2}{b}$$

Pertanto ogni impresa praticerebbe il prezzo p_m vendendo la quantità $\frac{y_m}{2}$, ottenendo metà dei profitti di monopolio.

Strategie di intervento (trigger strategies) del supergioco

Per sostenere la collusione tacita le imprese adottano la seguente strategia: nel primo periodo del supergioco l'impresa sceglie il prezzo p_m . Nei periodi successivi l'impresa sceglie lo stesso prezzo SOLO SE in TUTTI i periodi precedenti ha osservato che il rivale ha praticato il prezzo p_m . In caso contrario pratica per sempre il prezzo di equilibrio di Bertrand.

In questo caso l'impresa 1, se non devia, ottiene la stessa serie di profitti calcolata in precedenza denominata $v1nd$. Se invece devia ottiene

> **p1pdev:=pim;**

$$p1pdev := \frac{1}{4} \frac{(-100 + c)^2}{b}$$

infatti basta diminuire il prezzo di ϵ per ottenere tutti i profitti di monopolio in quel periodo. Tuttavia la punizione corrisponde al profitto di Bertrand (quindi nullo) in tutti i periodi successivi.

> **punizione:=0;**

$$punizione := 0$$

> **v1pdev:=p1pdev+punizione;**

$$v1pdev := \frac{1}{4} \frac{(-100 + c)^2}{b}$$

Occorre pertanto confrontare $v1nd$ con $v1pdev$, e risolvere per δ .

> **v1nd>=v1pdev;**

$$\frac{1}{4} \frac{(-100 + c)^2}{b} \leq \frac{1}{4} \frac{(-100 + c)^2}{b(2 - 2\delta)}$$

> **solve(v1nd>=v1pdev, delta);**

$$\frac{1}{2}$$

e pertanto occorre che $\frac{1}{2} \leq \delta$ e $\delta \leq 1$. Si noti che in caso di competizione sulle quantità δ

doveva essere almeno pari a $\frac{9}{17}$, quindi un valore maggiore di $\frac{1}{2}$. In caso di competizione sui prezzi il futuro deve "contare meno", per sostenere la collusione tacita, rispetto al caso di competizione sulle quantità.

Questo è dovuto alla maggiore severità della punizione nel primo caso. Il risultato finale è lo stesso ma l'intervallo per δ cambia. Infatti anche riprendendo il precedente esempio e

rappresentando graficamente le serie scontate dei profitti otteniamo

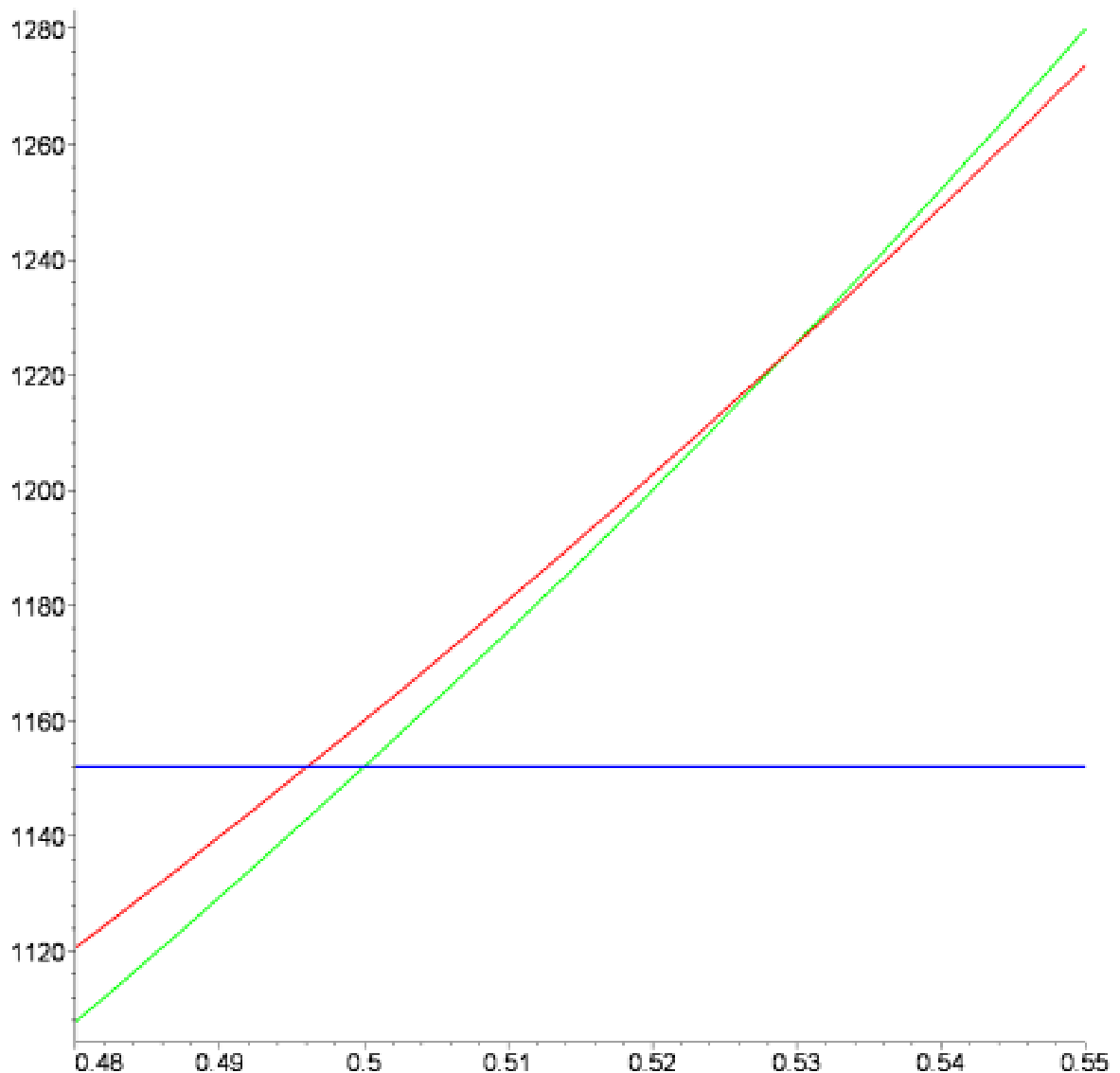
```
> v11nd;
```

$$1152 \frac{1}{2 - 2\delta}$$

```
> v11pdev:=subs(data,v1pdev);
```

$v11pdev := 1152$

```
> plot({v11nd,v11dev,v11pdev}, delta=0.48..0.55,  
color=[blue,red,green], thickness=3);
```



```
>
```

L'intersezione tra i profitti rossi e quelli verdi (costanti perchè non dipendono da δ) avviene prima che con quelli blu.

- Risultato e discussione critica

In caso di competizione con orizzonte temporale infinito le imprese possono coordinarsi e ottenere profitti uniperiodali simili a quelli realizzati mediante la formazione di un cartello.

Si noti che per ottenere questo risultato è importante che i profitti futuri contino più che i maggiori guadagni connessi ad una deviazione (competizione) di breve periodo. Questo dipende dal valore del fattore di sconto.

Nel mondo reale il ruolo del fattore di sconto viene anche interpretato dal periodo di tempo necessario per individuare una deviazione. Se questo tempo è lungo, allora deviare porta profitti elevati. Più invece è facile scoprire una deviazione più i mancati profitti futuri legati alla collusione tacita sono rilevanti.

Nell'analisi precedente abbiamo sempre considerato $\delta = \frac{1}{1+r}$. Supponiamo però che r sia il tasso annuale di sconto e che invece le imprese cambino i loro prezzi con una frequenza annuale pari a f (volte all'anno). Quindi se ad esempio $f = 5$ allora le imprese cambiano i prezzi 5 volte all'anno - ogni $\frac{365}{5} = 73$ giorni. Se invece $f = 10$, le imprese cambiano i prezzi ogni $\frac{365}{10} = 36$ giorni. In questo caso una somma x depositata in banca rende dopo 36 giorni $x + \frac{x \cdot 36 \cdot r}{365}$, ossia $x \left(1 + \frac{r}{10} \right)$, pertanto $x \left(1 + \frac{r}{f} \right)$. Allora avremmo $\delta = \frac{1}{1 + \frac{r}{f}}$. Quindi, se f cresce allora il

denominatore diventa sempre più piccolo e quindi δ sale. Si noti che più frequentemente le imprese cambiano i prezzi minore maggiore è δ e più probabilmente la collusione tacita avrà successo.

Allo stesso modo, se consideriamo che la domanda futura possa crescere al tasso g , allora $\delta = \frac{1(1+g)}{1 + \frac{r}{f}}$. Anche in questo caso, maggiore è g più elevato è δ e più probabile è il successo della collusione tacita.

La collusione tacita va intesa come assenza di competizione tra le imprese. Le imprese oligopolistiche con potere di mercato si rendono conto che una competizione di tipo statico (Cournot o Bertrand) non paga in termini di profitti e sono spinte a non adottare strategie di mercato aggressive nei confronti dei rivali.

Il risultato ottenuto dipende anche dal fatto che la domanda è nota e stabile, e che le condizioni di costo delle imprese siano note e stabili. Se queste condizioni si modificano diventa più difficile sostenere la collusione tacita.

Quali sono i mercati in cui è più facile che si verifichino tali condizioni: i mercati cosiddetti "maturi", a domanda e tecnologia stabile.



Incentivo alla collusione tacita: Cournot vs Bertrand

Consideriamo il caso di due imprese che competono tra loro con orizzonte infinito scegliendo in ogni periodo la quantità. Mantenendo i dati dei precedenti esempi, potremmo ipotizzare che le due imprese adottino la seguente strategia: invece che produrre in ogni periodo la quantità di Cournot (ossia ciascuna produce ad esempio 16) producono nel primo periodo metà dell'output di monopolio ciascuna, quindi se supponiamo $y^M = 24$ ognuna produce 12. Nei periodi successivi al primo, le imprese continuano a produrre 12 solo se il rivale in tutti i periodi precedenti ha a sua volta prodotto 12. In caso contrario l'impresa produrrà l'output di equilibrio di Cournot per sempre.

Per verificare se la strategia di intervento proposta rappresenta un equilibrio, cominciamo a verificare quanto ottiene ogni impresa se nessuna devia dalla strategia proposta, ossia produce in ogni periodo 12. In tal caso l'impresa 1, e similamente l'impresa 2, ottiene 576 (la metà di $\pi^M = 1152$) di profitto in ogni periodo, quindi $(1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 \dots)576$. Questa serie infinita di profitti converge all'espressione

```
[ > nondevia:=576/(1-delta);
```

$$\text{nondevia} := 576 \frac{1}{1 - \delta}$$

Se l'impresa devia, nel periodo in cui questo avviene massimizza i profitti sapendo che il rivale produrrà, non deviando, 12. Quindi

```
[ > prof:=(100-2*(y11+12))*y11-4*y11;
```

$$\text{prof} := (76 - 2 y_{11}) y_{11} - 4 y_{11}$$

```
[ > diff(prof,y11);
```

$$-4 y_{11} + 72$$

```
[ > solve(%,y11);
```

$$18$$

Pertanto nel periodo in cui l'impresa 1 devia abbiamo $p = 100 - 2(18 + 12)$, quindi $p = 40$, ed il profitto dell'impresa 1 diventa $\pi = (40 - 4) 18$ cioè 648. Nel periodo in cui devia l'impresa ottiene dei profitti superiori a 576, quelli legati alla strategia di intervento. Ma nei periodi successivi il profitto diventa $(\delta + \delta^2 + \delta^3 \dots)512$, dove 512 rappresenta il profitto nell'equilibrio di Cournot. Quindi il profitto se devia è

```
[ > devia:=648+(delta/(1-delta))*512;
```

$$\text{devia} := 648 + \frac{512 \delta}{1 - \delta}$$

Confrontando i profitti delle due strategie otteniamo l'intervallo di δ in cui la strategia di intervento rappresenta un equilibrio.

```
[ > solve(nondevia>=devia, delta);
```

$$\text{RealRange}\left(\frac{9}{17}, \text{Open}(1)\right)$$

Pertanto $\frac{9}{17} \leq \delta$ e $\delta \leq 1$ è l'intervallo che porta ad un equilibrio in cui ciascuna impresa in ogni

periodo produce metà dell'output di monopolio. Infatti se $\delta = .9$ abbiamo

```
[ > delta:=0.9:devia,nondevia;
      5256.000000, 5760.
```

quindi il profitto deviando è inferiore a quello connesso alla strategia di intervento. Notiamo che in questo modo le due imprese, anziché produrre l'output di Cournot in ogni periodo, producono la metà dell'output di monopolio. Pertanto pur comportandosi in modo indipendente assumono le stesse decisioni di un cartello, in cui le scelte sono congiunte. Tale soluzione viene per questo motivo denominata "collusione tacita", nel senso che le imprese agiscono in modo indipendente ma si comportano come se facessero parte di un cartello.

Se le imprese scegliessero i prezzi invece che le quantità potrebbero adottare la seguente strategia di intervento: nel primo periodo p^M , in tutti i periodi successivi p^M solo se in tutti i periodi precedenti l'impresa rivale ha a sua volta scelto p^M ; in caso contrario per sempre l'equilibrio di Bertrand, ossia $p = MC$. In tal caso abbiamo

```
[ > delta:='delta':nondevia;
      576  $\frac{1}{1-\delta}$ 
```

se l'impresa non devia ottiene in ogni periodo 576 (infatti le imprese se praticano entrambe p^M si dividono la domanda del mercato). Se devia, sapendo che nel periodo t il rivale pratica $p^M = 52$, ottiene il massimo profitto uniperiodale scegliendo $52 - \epsilon$. In tal modo ottiene tutto il mercato e (quasi) i profitti di monopolio, pari a 1152. Quindi

```
[ > devia:=1152;
      devia := 1152
```

infatti da $t + 1$ in poi ottiene i profitti dell'equilibrio di Bertrand, pari a 0. Risolvendo per δ otteniamo

```
[ > solve(nondevia>=devia, delta);
      RealRange( $\frac{1}{2}$ , Open(1))
```

L'intervallo di δ in cui non conviene deviare è $\frac{1}{2} \leq \delta$ e $\delta \leq 1$, che è più ampio di quello

precedente. Infatti la perdita di profitti futuri è maggiore rispetto a quella di Cournot.

Manipolando i profitti scontati sia in caso di deviazione che di non deviazione, possiamo

scrivere che non deviare è meglio di deviare quando $1152 - 576 < \frac{\delta}{1-\delta} 576$. Il primo membro

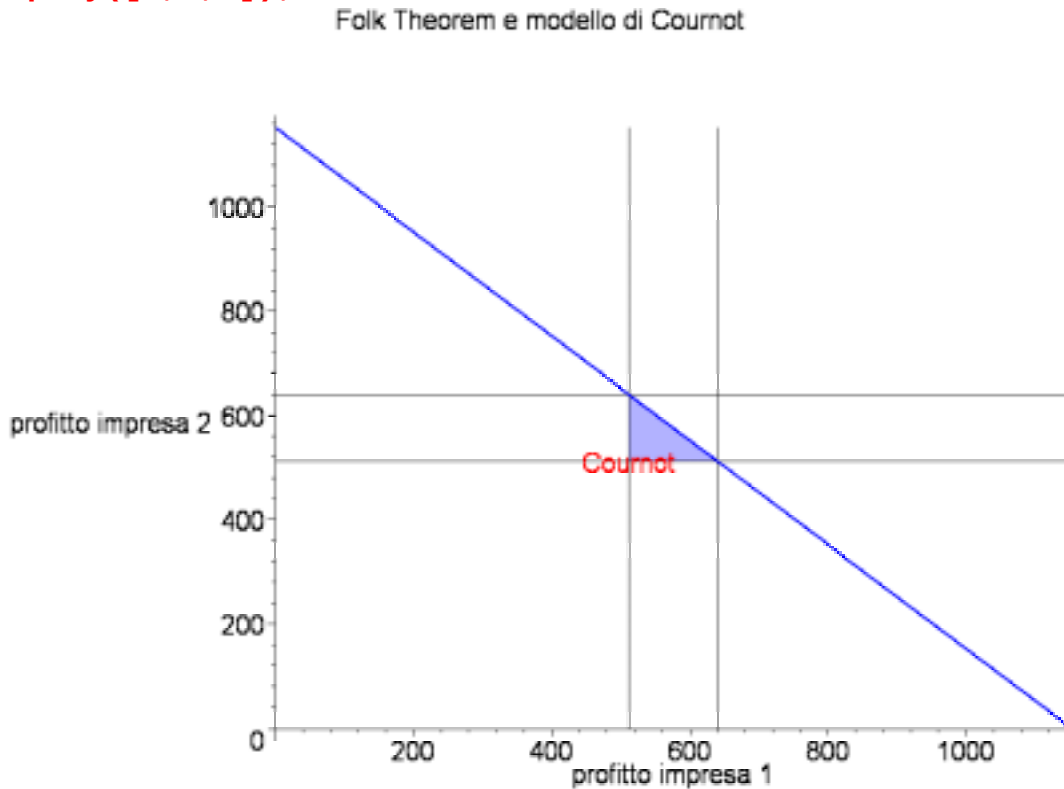
della disuguaglianza indica che i guadagni di breve periodo (quelli in cui avviene la deviazione, ossia 1152, i profitti da deviazione, meno 576, quelli ottenuti in quel periodo non deviando) devono essere inferiori alle perdite di lungo periodo (secondo membro della disuguaglianza).

Quindi non deviare è un equilibrio se le perdite future pesano molto rispetto ai guadagni attuali.

I modelli dinamici mostrano pertanto che, se le imprese danno importanza ai profitti futuri, allora possono ottenere, coordinandosi in modo tacito, profitti uniperiodali superiori a quelli descritti nei modelli statici. Questo risultato è noto come Folk Theorem. Sulla base di tale teorema

possiamo rappresentare quanto segue

```
[ > with(plots):  
[ > a:=plot(1152-y, y=0..1152, color=blue, labels=["profitto  
[   impresa 1","profitto impresa 2"],thickness=3,title="Folk  
[   Theorem e modello di Cournot"):  
[ > b:=textplot([512,512, "Cournot"], color=red,thickness=3):  
[ > c:=inequal({p<=1152-y, y>=512, y<=640, p>=512, p<=640},  
[   y=0..1152, p=0..1152, optionexcluded=(color=white)):  
[ > display([a,b,c]);
```

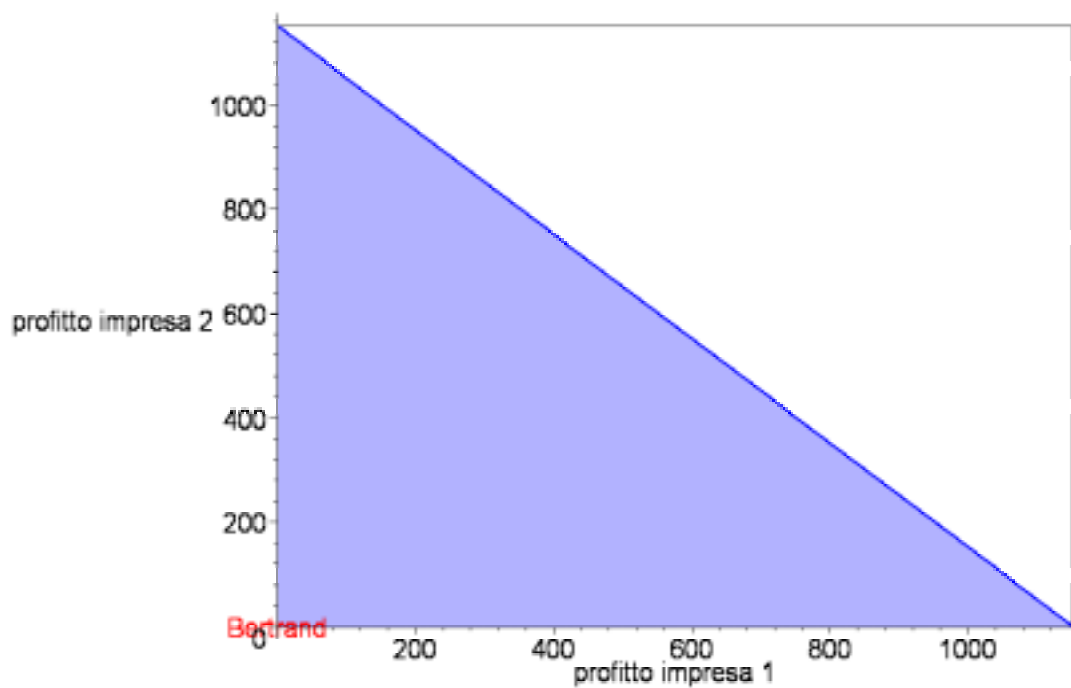


Nel grafico la retta blu indica la frontiera delle possibilità di profitto da parte delle due imprese. Ogni punto sotto la frontiera è ottenibile; ogni punto della frontiera coincide con il profitto di monopolio, 1152. Lungo la frontiera cambia la proporzione con cui le due imprese si suddividono i profitti di monopolio. Nel grafico sono indicati i profitti corrispondenti all'equilibrio di Cournot, 512 per ciascuna impresa. L'area blu descrive tutte le combinazioni di profitto tra le due imprese ottenibili nel modello dinamico che offrono un incremento paretiano rispetto all'equilibrio di Cournot.

Lo stesso grafico può essere esteso al caso della competizione sui prezzi

```
[ > with(plots):  
[ > a:=plot(1152-y, y=0..1152, color=blue, labels=["profitto  
[   impresa 1","profitto impresa 2"],thickness=3,title="Folk  
[   Theorem e modello di Bertrand"):  
[ > b:=textplot([0,0, "Bertrand"], color=red,thickness=3):  
[ > c:=inequal({p<=1152-y, y>=0, y<=1152, p>=0, p<=1152},  
[   y=0..1152, p=0..1152, optionexcluded=(color=white)):  
[ > display([a,b,c]);
```

Folk Theorem e modello di Bertrand



[>

Nell 'equilibrio di Bertrand i profitti sono nulli, quindi ci troviamo nell'origine del grafico.

Pertanto ogni punto dell'area blu rappresenta, per le imprese, un miglioramento paretiano rispetto al modello statico. Si noti come l'area blu è molto più grande in caso di competizione sui prezzi.

[>