

Differenziazione orizzontale: modelli a varietà fissa

Gianmaria Martini

- Introduzione

I modelli a varietà fissa assumono che il prodotto sia già differenziato, quindi la strategia di differenziazione non viene scelta dalle imprese. Essi consentono però di valutare gli effetti della differenziazione sui profitti delle imprese.

I modelli a varietà fissa modificano la funzione di domanda, che non è più quella globale del mercato, ma è una per ciascuna delle imprese che partecipano all'industria. Infatti una quota di consumatori preferisce il bene prodotto dall'impresa i anche se il prezzo di quest'ultima è superiore a quello dell'impresa j .

In caso di competizione sulle quantità le funzioni di domanda inverse sono date da

```
[ > restart;  
[ > p1:=alpha-beta*y1-gamma*y2;  
                                p1 :=  $\alpha - \beta y1 - \gamma y2$   
[ > p2:=alpha-gamma*y1-beta*y2;  
                                p2 :=  $\alpha - \gamma y1 - \beta y2$ 
```

dove β rappresenta l'effetto diretto del proprio prezzo sulla propria domanda, mentre γ costituisce l'effetto incrociato, ossia dell'effetto sulla domanda di i del prezzo di j (con $\gamma < \beta$). In presenza di competizione sui prezzi, occorre derivare le domande dirette, invertendo le domande inverse. Impostiamo

```
[ > eq1:=p1-h;  
                                eq1 :=  $\alpha - \beta y1 - \gamma y2 - h$   
[ > eq2:=p2-k;  
                                eq2 :=  $\alpha - \gamma y1 - \beta y2 - k$   
[ > solve({eq1,eq2},{y1,y2});  
                                {y1 =  $\frac{\alpha \beta - \gamma \alpha + \gamma k - h \beta}{-\gamma^2 + \beta^2}$ , y2 =  $\frac{\alpha \beta - \gamma \alpha + \gamma h - k \beta}{-\gamma^2 + \beta^2}$ }
```

dove $h = p1$ e $k = p2$. Pertanto possiamo scrivere le due domande dirette come, assumendo

```
[ > a:=(alpha*beta-gamma*alpha)/(beta^2-gamma^2);  
                                a :=  $\frac{\alpha \beta - \gamma \alpha}{-\gamma^2 + \beta^2}$   
[ > b:=beta/(beta^2-gamma^2);
```

$$b := \frac{\beta}{-\gamma^2 + \beta^2}$$

> `c:=gamma/(beta^2-gamma^2);`

$$c := \frac{\gamma}{-\gamma^2 + \beta^2}$$

> `y11:=a-b*p11+c*p22;`

$$y11 := \frac{\alpha \beta - \gamma \alpha}{-\gamma^2 + \beta^2} - \frac{\beta p11}{-\gamma^2 + \beta^2} + \frac{\gamma p22}{-\gamma^2 + \beta^2}$$

> `y22:=a+c*p11-b*p22;`

$$y22 := \frac{\alpha \beta - \gamma \alpha}{-\gamma^2 + \beta^2} + \frac{\gamma p11}{-\gamma^2 + \beta^2} - \frac{\beta p22}{-\gamma^2 + \beta^2}$$

Il grado di differenziazione del prodotto δ è dato dal rapporto tra l'effetto diretto (β) e l'effetto incrociato (γ), ossia $\delta = \frac{\gamma^2}{\beta^2}$. In presenza di beni omogenei (assenza di differenziazione, pertanto $\gamma = \beta$) $\delta = 1$ (e c tende a b), in presenza di mercati separati (massima differenziazione, quindi $\gamma = 0$) $\delta = 0$ (con c che tende a 0).

In assenza di differenziazione la domanda inversa diventa unica e uguale a $p = \alpha - \beta (y1 + y2)$, come nel modello di Cournot con beni omogenei. La domanda diretta invece è simile al modello di Bertrand con bene omogeneo, quindi discontinua.

Si hanno tre modelli generali di differenziazione a varietà fissa: Cournot, Bertrand e price leadership. Per trattarli ipotizziamo che le imprese siano solo due e producano in assenza di costi.

- Modello di Cournot con differenziazione orizzontale

Le funzioni del profitto delle imprese sono

> `pi1:=p1*y1;`

$$\pi1 := (\alpha - \beta y1 - \gamma y2) y1$$

> `pi2:=p2*y2;`

$$\pi2 := (\alpha - \gamma y1 - \beta y2) y2$$

ricaviamo le funzioni di reazione

> `cpoy1:=diff(pi1,y1);`

$$cpoy1 := -2 \beta y1 + \alpha - \gamma y2$$

> `cpoy2:=diff(pi2,y2);`

$$cpoy2 := -2 \beta y2 + \alpha - \gamma y1$$

e prima di risolvere il modello, rappresentiamole graficamente

> `real:=solve(cpoy1,y2);`

$$real := \frac{-2 \beta y1 + \alpha}{\gamma}$$

```
> rea2:=solve(cpo2,y2);
```

$$rea2 := \frac{1}{2} \frac{\alpha - \gamma y1}{\beta}$$

```
> with(plots):
```

```
Warning, the name changecoords has been redefined
```

Valutiamo l'impatto della differenziazione sulle funzioni di reazione e quindi sull'equilibrio di Cournot, confrontandolo con il caso di assenza di differenziazione.

Osserviamo cosa accade al crescere di γ , che al massimo potrà essere pari a 4. Ipotizziamo che $\alpha = 100$ e $\beta = 4$. Quindi assenza di differenziazione nel nostro caso corrisponde a $\gamma = 4$

```
> alpha:=100:beta:=4:real,rea2;
```

$$\frac{-8 y1 + 100}{\gamma}, \frac{25}{2} - \frac{1}{8} \gamma y1$$

```
> rea11:=y1->piecewise(0<=y1 and y1<=25/2,
100/gamma-(8/gamma)*y1, 0);
```

$$rea11 := y1 \rightarrow \text{piecewise}\left(0 \leq y1 \text{ and } y1 \leq \frac{25}{2}, 100 \frac{1}{\gamma} - \frac{8 y1}{\gamma}, 0\right)$$

```
> rea11(y1);
```

$$\begin{cases} 100 \frac{1}{\gamma} - \frac{8 y1}{\gamma} & -y1 \leq 0 \text{ and } y1 - \frac{25}{2} \leq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

```
> rea22:=y1->piecewise(0<=y1 and y1<=100/gamma,
25/2-(1/8)*gamma*y1, 0);
```

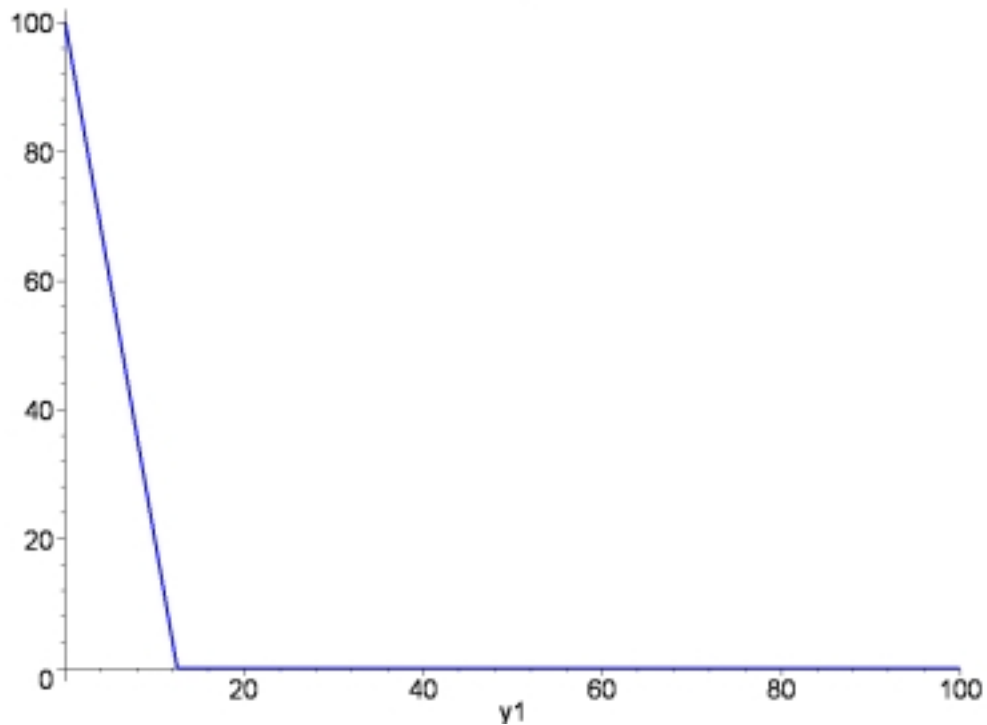
$$rea22 := y1 \rightarrow \text{piecewise}\left(0 \leq y1 \text{ and } y1 \leq 100 \frac{1}{\gamma}, \frac{25}{2} - \frac{1}{8} \gamma y1, 0\right)$$

```
> rea22(y1);
```

$$\begin{cases} \frac{25}{2} - \frac{1}{8} \gamma y1 & -y1 \leq 0 \text{ and } y1 - \frac{100}{\gamma} \leq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

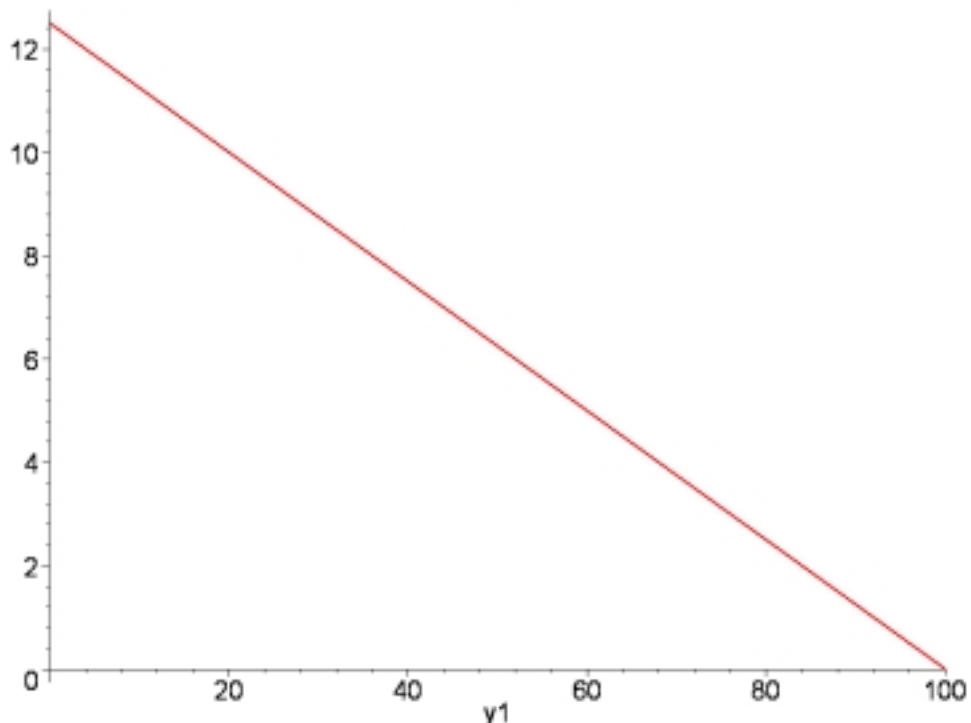
```
> animate(rea11(y1), y1=0..100, gamma=1..4, color=blue,
thickness=3, title="Effetto di una minore
differenziazione\nReazione impresa 1");
```

Effetto di una minore differenziazione
Reazione impresa 1



```
> animate(rea22(y1),y1=0..100, gamma=1..4, color=red,  
thickness=3, title="Effetto di una minore  
differenziazione\nReazione impresa 2");
```

Effetto di una minore differenziazione
Reazione impresa 2

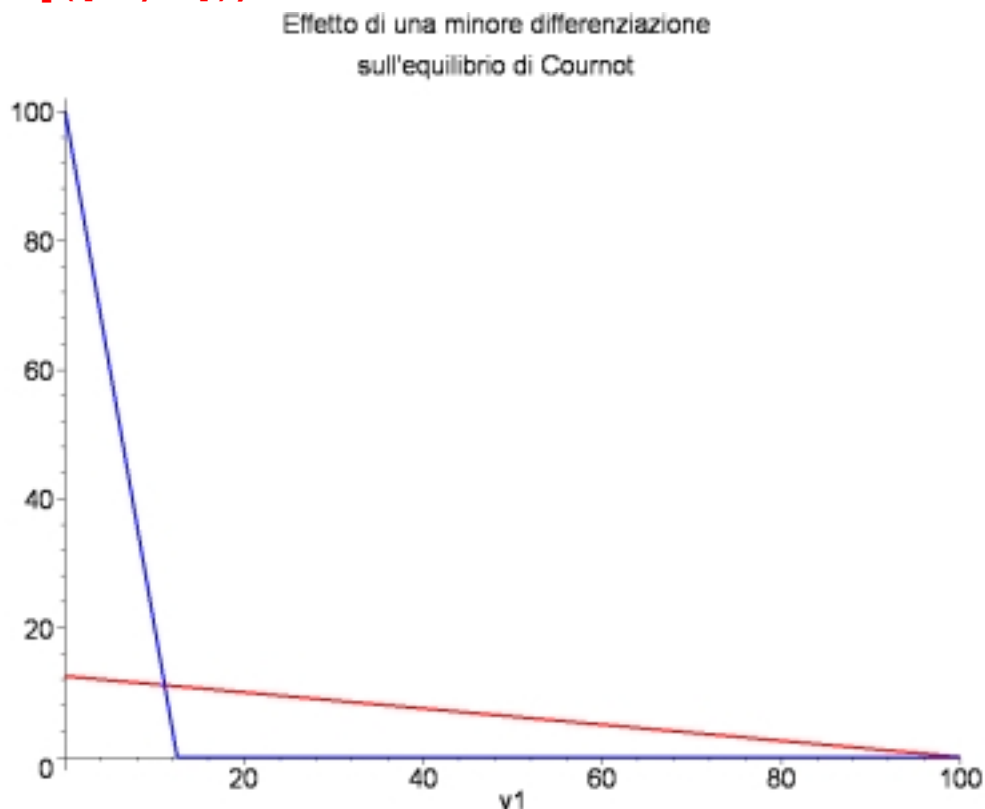


Si nota che le funzioni di reazione diventano più inclinate al crescere di γ , quindi al diminuire della differenziazione. Pertanto, ogni imprese reagisce in modo crescente a variazioni di output del rivale al diminuire della differenziazione, perché **crece l'intensità della competizione**. Inoltre le funzioni di reazione sono inclinate negativamente: **le imprese agiscono come**

sostitute dal punto di vista strategico.

E' possibile anche osservare l'effetto sull'equilibrio della diminuzione della differenziazione.

```
> a1:=animate(rea11(y1), y1=0..100, gamma=1..4,
thickness=3,color=blue):
> b1:=animate(rea22(y1), y1=0..100, gamma=1..4,
thickness=3,color=red, title="Effetto di una minore
differenziazione\nsull'equilibrio di Cournot"):
> display([a1,b1]);
```



pertanto l'equilibrio di Cournot porta a livelli di output sempre minore al diminuire della differenziazione. La soluzione, tornando a valori generici è la seguente

```
> alpha:='alpha':beta:='beta':c1:=c1,c2:=c2;
      -2 β y1 + α - γ y2, -2 β y2 + α - γ y1
> outputs:=solve({c1,c2}, {y1,y2});
      outputs := {y2 =  $\frac{\alpha}{\gamma + 2 \beta}$ , y1 =  $\frac{\alpha}{\gamma + 2 \beta}$ }
```

```
> assign(outputs);
> y1,y2;
```

$$\frac{\alpha}{\gamma + 2 \beta}, \frac{\alpha}{\gamma + 2 \beta}$$

```
> pi1:=factor(pi1);
```

$$\pi_1 := \frac{\alpha^2 \beta}{(\gamma + 2 \beta)^2}$$

```
> pi2:=factor(pi2);
```

$$\pi_2 := \frac{\alpha^2 \beta}{(\gamma + 2\beta)^2}$$

si noti che se γ aumenta i profitti diminuiscono. Pertanto differenziare conviene alle imprese.

La competizione non basata sul prezzo consente di ottenere profitti più elevati.

- Modello di Bertrand con differenziazione orizzontale

I profitti sono dati da, ritornando alle domande dirette

```
> pi11:=p11*y11;
```

$$\pi_{11} := p_{11} \left(\frac{\alpha \beta - \gamma \alpha}{-\gamma^2 + \beta^2} - \frac{\beta p_{11}}{-\gamma^2 + \beta^2} + \frac{\gamma p_{22}}{-\gamma^2 + \beta^2} \right)$$

```
> pi22:=p22*y22;
```

$$\pi_{22} := p_{22} \left(\frac{\alpha \beta - \gamma \alpha}{-\gamma^2 + \beta^2} + \frac{\gamma p_{11}}{-\gamma^2 + \beta^2} - \frac{\beta p_{22}}{-\gamma^2 + \beta^2} \right)$$

le condizioni di primo ordine sono

```
> cpop11:=diff(pi11,p11);
```

$$c_{pop11} := \frac{\alpha \beta - \gamma \alpha}{-\gamma^2 + \beta^2} - \frac{2\beta p_{11}}{-\gamma^2 + \beta^2} + \frac{\gamma p_{22}}{-\gamma^2 + \beta^2}$$

```
> cpop22:=diff(pi22,p22);
```

$$c_{pop22} := \frac{\alpha \beta - \gamma \alpha}{-\gamma^2 + \beta^2} + \frac{\gamma p_{11}}{-\gamma^2 + \beta^2} - \frac{2\beta p_{22}}{-\gamma^2 + \beta^2}$$

```
> rea111:=solve(cpop11,p22);
```

$$rea_{111} := \frac{-\alpha \beta + \gamma \alpha + 2\beta p_{11}}{\gamma}$$

```
> rea222:=solve(cpop22,p22);
```

$$rea_{222} := -\frac{1}{2} \frac{-\alpha \beta + \gamma \alpha - \gamma p_{11}}{\beta}$$

vediamo l'effetto della differenziazione sulle funzioni di reazione. Ipotizziamo un certo valore di β

```
> beta:=4:alpha:=100:rea111,rea222;
```

$$\frac{-400 + 100\gamma + 8p_{11}}{\gamma}, 50 - \frac{25}{2}\gamma + \frac{1}{8}\gamma p_{11}$$

```
> h1:=(400-100*gamma)/8;
```

$$h_1 := 50 - \frac{25}{2}\gamma$$

```
> reaimp1:=p11->piecewise(p11>=0 and p11<=h1, 0, rea111);
```

$$reaimp_1 := p_{11} \rightarrow \text{piecewise}(0 \leq p_{11} \text{ and } p_{11} \leq h_1, 0, rea_{111})$$

```
> reaimp1(p11);
```

$$\begin{cases} 0 & -p11 \leq 0 \text{ and } p11 - 50 + \frac{25}{2} \gamma \leq 0 \\ \frac{-400 + 100 \gamma + 8 p11}{\gamma} & \text{otherwise} \end{cases}$$

> **rea222;**

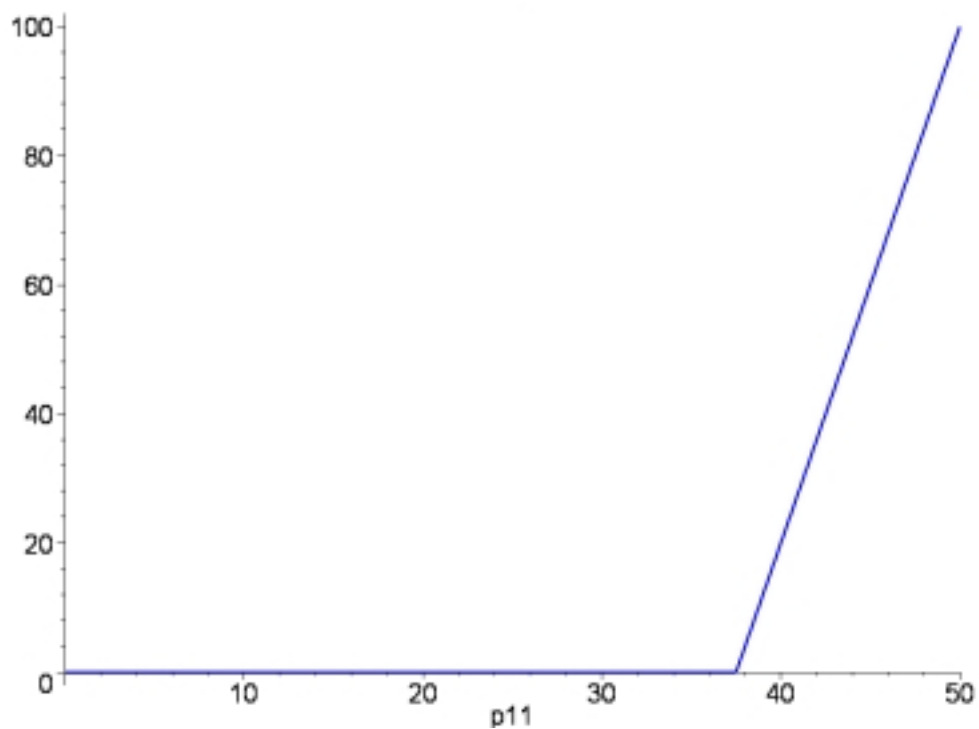
$$50 - \frac{25}{2} \gamma + \frac{1}{8} \gamma p11$$

> **with(plots):**

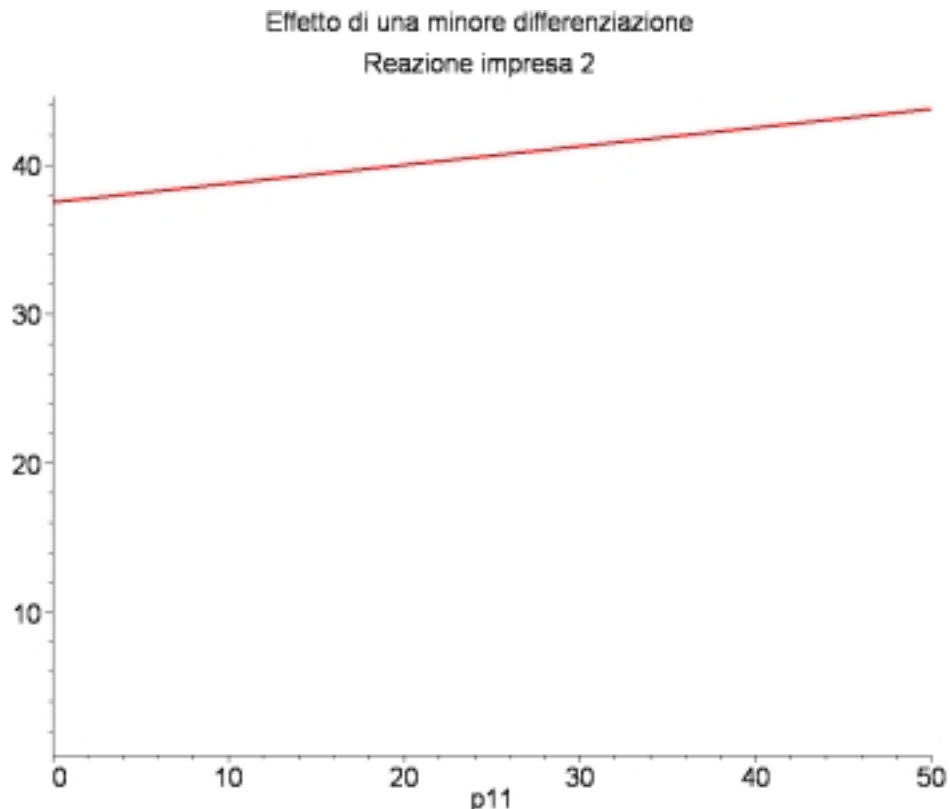
> **animate(reaimpl(p11), p11=0..50, gamma=1..3.9, color=blue, thickness=3, title="Effetto di una minore differenziazione\nReazione impresa 1");**

Effetto di una minore differenziazione

Reazione impresa 1



> **animate(rea222, p11=0..50, gamma=1..3.9, color=red, thickness=3, title="Effetto di una minore differenziazione\nReazione impresa 2");**



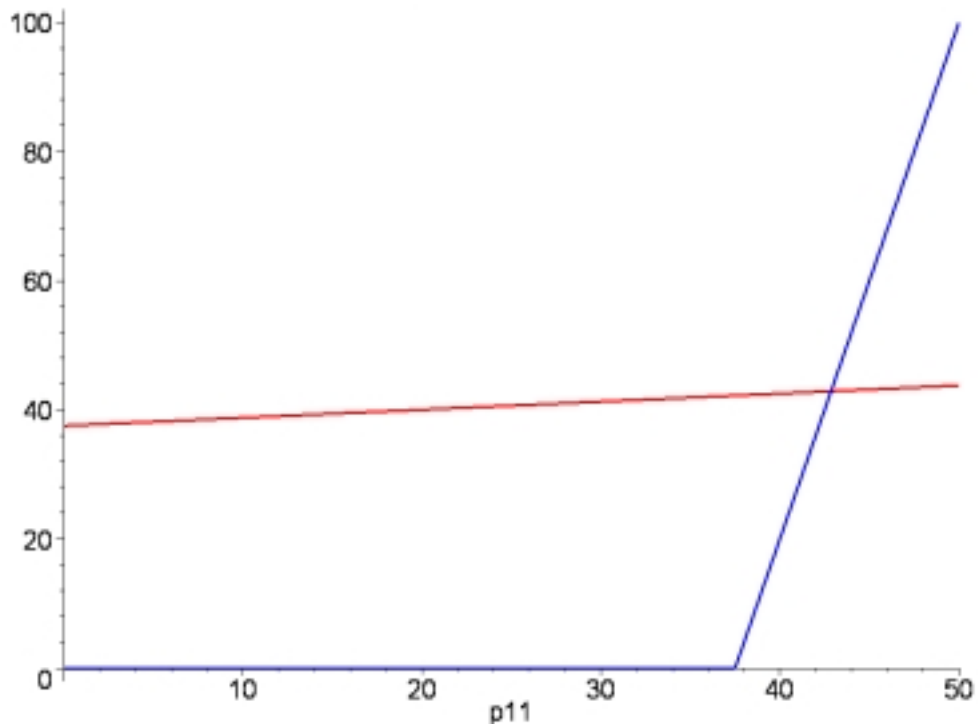
Le funzioni di reazione diventano più inclinate, quindi ancora una volta le imprese reagiscono maggiormente a variazioni dei prezzi dei rivali in caso di minore differenziazione.

Inoltre le funzioni di reazione sono inclinate positivamente: **le imprese agiscono come complementi dal punto di vista strategico**. Se l'impresa rivale aumenta il prezzo reagisco con un aumento di prezzo.

Vediamo l'effetto sull'equilibrio di Bertrand di una minore differenziazione

```
> c1:=animate(reaimp1(p11), p11=0..50, gamma=1..3.9,
color=blue, thickness=3, title="Effetto di una minore
differenziazione\nsull'equilibrio di Bertrand"):
> c2:=animate(rea222, p11=0..50,gamma=1..3.9,color=red,
thickness=3):
> display([c1,c2]);
```


Effetto di una minore differenziazione
sull'equilibrio di Bertrand



Quindi i prezzi diminuiscono al diminuire della differenziazione. Le soluzioni sono date da

```
> alpha:='alpha':beta:='beta':cpop11,cpop22;
```

$$\frac{\alpha \beta - \gamma \alpha}{-\gamma^2 + \beta^2} - \frac{2 \beta p11}{-\gamma^2 + \beta^2} + \frac{\gamma p22}{-\gamma^2 + \beta^2}, \frac{\alpha \beta - \gamma \alpha}{-\gamma^2 + \beta^2} + \frac{\gamma p11}{-\gamma^2 + \beta^2} - \frac{2 \beta p22}{-\gamma^2 + \beta^2}$$

```
> prices:=solve({cpop11,cpop22}, {p11,p22});
```

$$prices := \{p22 = \frac{\alpha (\beta - \gamma)}{2 \beta - \gamma}, p11 = \frac{\alpha (\beta - \gamma)}{2 \beta - \gamma}\}$$

```
> assign(prices);
```

```
> pi11:=simplify(pi11);
```

$$\pi11 := -\frac{\beta (-\beta + \gamma) \alpha^2}{(\gamma + \beta) (-2 \beta + \gamma)^2}$$

```
> pi22:=simplify(pi22);
```

$$\pi22 := -\frac{\beta (-\beta + \gamma) \alpha^2}{(\gamma + \beta) (-2 \beta + \gamma)^2}$$

anche in questo caso la differenziazione porta ad un aumento dei profitti (che sarebbero nulli in caso di competizione con beni omogenei, ossia $\beta = \gamma$).

- Price leadership

Supponiamo che, come nel tradizionale modello di Stackelberg, esista un leader: ipotizziamo che sia l'impresa 1. L'impresa 2 sarà pertanto il follower. Le due imprese si fanno concorrenza sul prezzo. A $t = 1$ l'impresa 1 (il leader) sceglie $p1$. A $t = 2$ l'impresa 2, il follower, dopo aver osservato $p1$ sceglie $p2$.

Essa si posizionerà pertanto lungo la sua funzione di reazione, che è la stessa di quella calcolata nel modello di Bertrand.

```
[ > restart;
[ > pi1:=p1*(100-b*p1+c*p2);
[                                     pi1 := p1 (100 - b p1 + c p2)
[ > pi2:=p2*(100+c*p1-b*p2);
[                                     pi2 := p2 (100 + c p1 - b p2)
[ > cpop2:=diff(pi2,p2);
[                                     cpop2 := 100 + c p1 - 2 b p2
[ > p2:=solve(cpop2,p2);
[                                     p2 :=  $\frac{1}{2} \frac{100 + c p1}{b}$ 
```

che rappresenta la funzione di reazione del follower. Nel primo periodo l'impresa 1 (il leader) anticiperà la mossa del follower, sostituendo nella sua funzione del profitto al posto di $p2$ la funzione di reazione del follower. Il profitto del leader diventa pertanto

```
[ > pi1;
[                                     p1  $\left( 100 - b p1 + \frac{\frac{1}{2} c (100 + c p1)}{b} \right)$ 
```

e massimizzerà questo profitto rispetto al suo prezzo, ottenendo

```
[ > cpop1:=diff(pi1,p1);
[                                     cpop1 :=  $100 - b p1 + \frac{\frac{1}{2} c (100 + c p1)}{b} + p1 \left( -b + \frac{\frac{1}{2} c^2}{b} \right)$ 
[ > p1:=solve(cpop1,p1);
[                                     p1 :=  $-50 \frac{2 b + c}{-2 b^2 + c^2}$ 
```

il prezzo del follower è quindi dato da

```
[ > p2:=simplify(p2);
[                                     p2 :=  $25 \frac{-4 b^2 + c^2 - 2 c b}{(-2 b^2 + c^2) b}$ 
```

ed i rispettivi profitti sono dati da

```
[ > pi1:=simplify(pi1);
[                                     pi1 :=  $-1250 \frac{(2 b + c)^2}{(-2 b^2 + c^2) b}$ 
[ > pi2:=simplify(pi2);
```

$$\pi_2 := 625 \frac{(-4b^2 + c^2 - 2cb)^2}{(-2b^2 + c^2)^2 b}$$

Un esempio numerico può aiutare a comprendere il significato economico di questa soluzione. Supponiamo che $b = 4$ e che $c = 1$. Scriviamo anche la funzione di isoprofitto del leader, ossia la funzione che descrive le combinazioni di $p1$ e $p2$ che garantiscono al leader lo stesso profitto. Dati i valori di b e c , la funzione del profitto del leader diventa

$\pi_1 = p1 (100 - 4 p1 + p2)$, e risolvendo per $p2$ otteniamo $p2 = \frac{\pi_1}{p1} - 100 + 4 p1$. Tale espressione rappresenta la funzione di isoprofitto del leader. Possiamo quindi scrivere

```
> isoprof:=prof/p11-100+4*p11;
```

$$isoprof := \frac{prof}{p11} - 100 + 4 p11$$

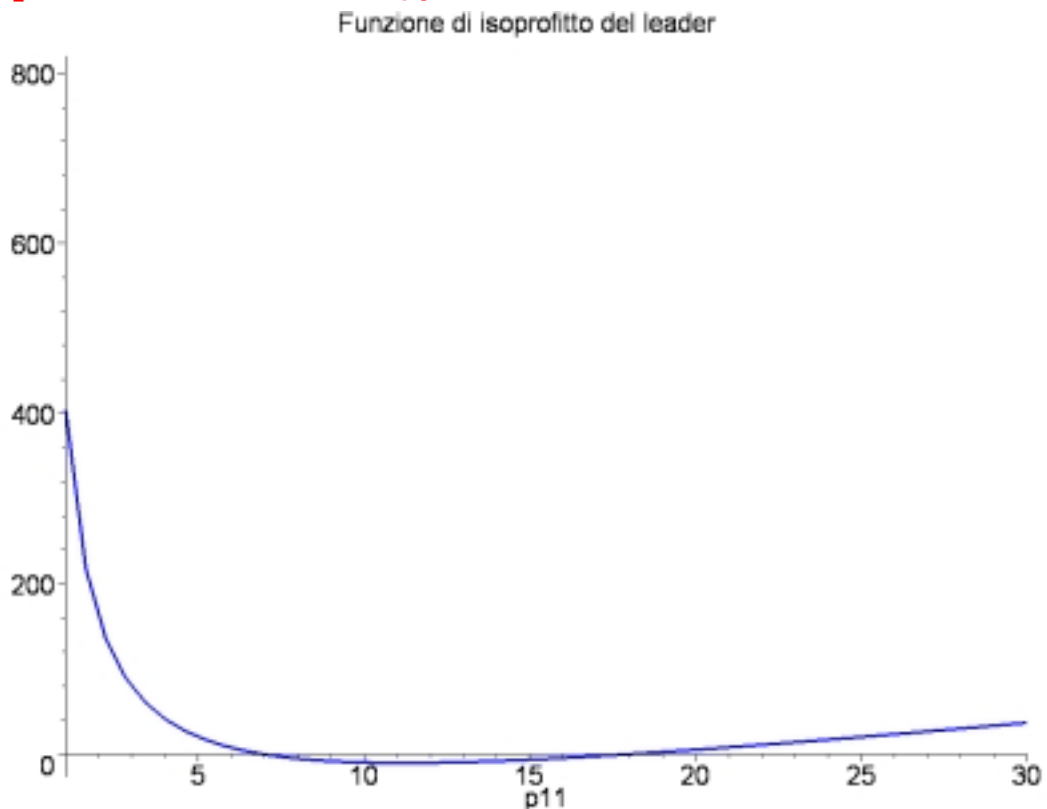
e rappresentarla graficamente al crescere di $prof$, per osservare come si comporta al crescere del profitto del leader.

```
> with(plots):
```

```
Warning, the name changecoords has been redefined
```

$$prof := prof$$

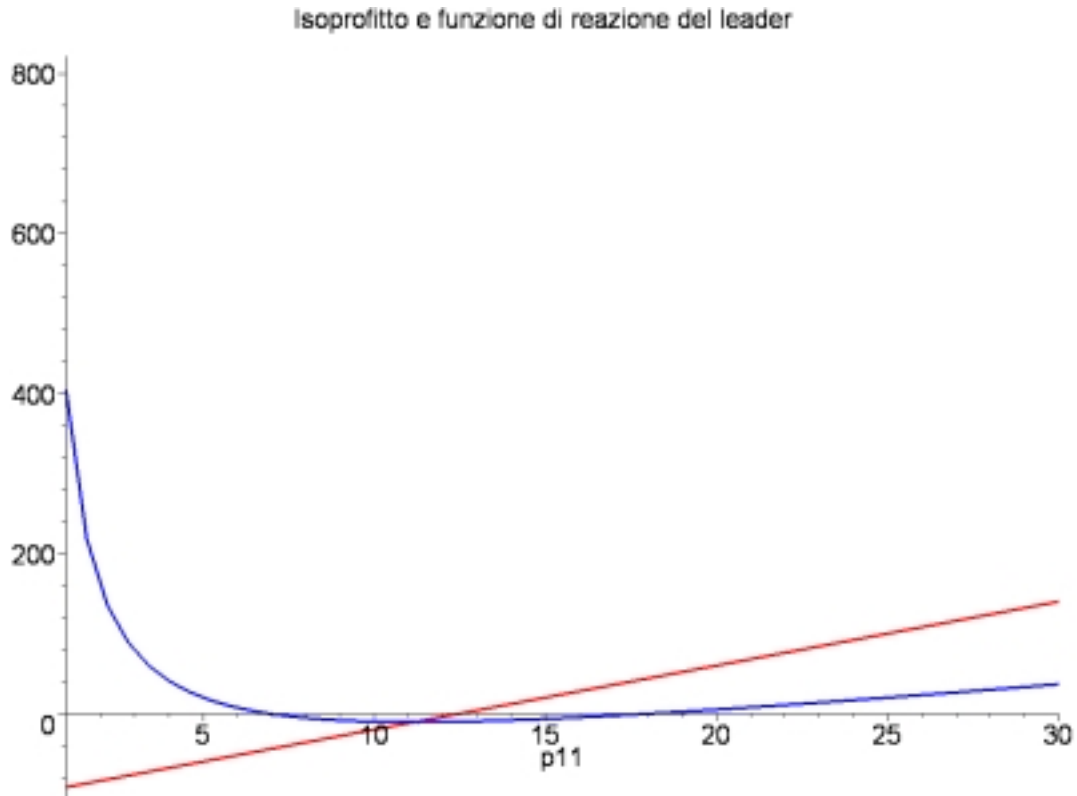
```
> animate(isoprof, p11=1..30,
prof=500..900,color=blue,thickness=3,title="Funzione di
isoprofitto del leader");
```



il grafico evidenzia che la funzione ha un punto di minimo e che il profitto cresce man mano che le funzioni di isoprofitto si spostano verso l'alto. Si noti che se scriviamo la funzione di

reazione del leader, data da (sostituendo per i valori supposti di b e c) $p_2 = -100 + 8 p_1$, come evidenzia il seguente grafico

```
> real:=(-100+8*p1)*prof/prof;  
                                     real := -100 + 8 p1  
> d1:=animate(isoprof, p11=1..30, prof=500..900,color=blue,  
thickness=3):  
> d2:=animate(real,p11=1..30, prof=500..900, color=red,  
title="Isoprofitto e funzione di reazione del leader"):  
> display([d1,d2]);
```



il punto di minimo della funzione di isoprofitto del leader avviene sempre nel punto di intersezione tra la funzione di isoprofitto e la funzione di reazione del leader.

Tra queste infinite funzioni di isoprofitto quale sarà quella scelta dal leader? Egli desidera posizionarsi su una funzione di isoprofitto che sia la più alta possibile, compatibilmente con il fatto che l'impresa 2 (il follower), starà sulla sua funzione di reazione.

Pertanto egli sceglierà il punto di tangenza tra la funzione di isoprofitto e la funzione di reazione del follower.

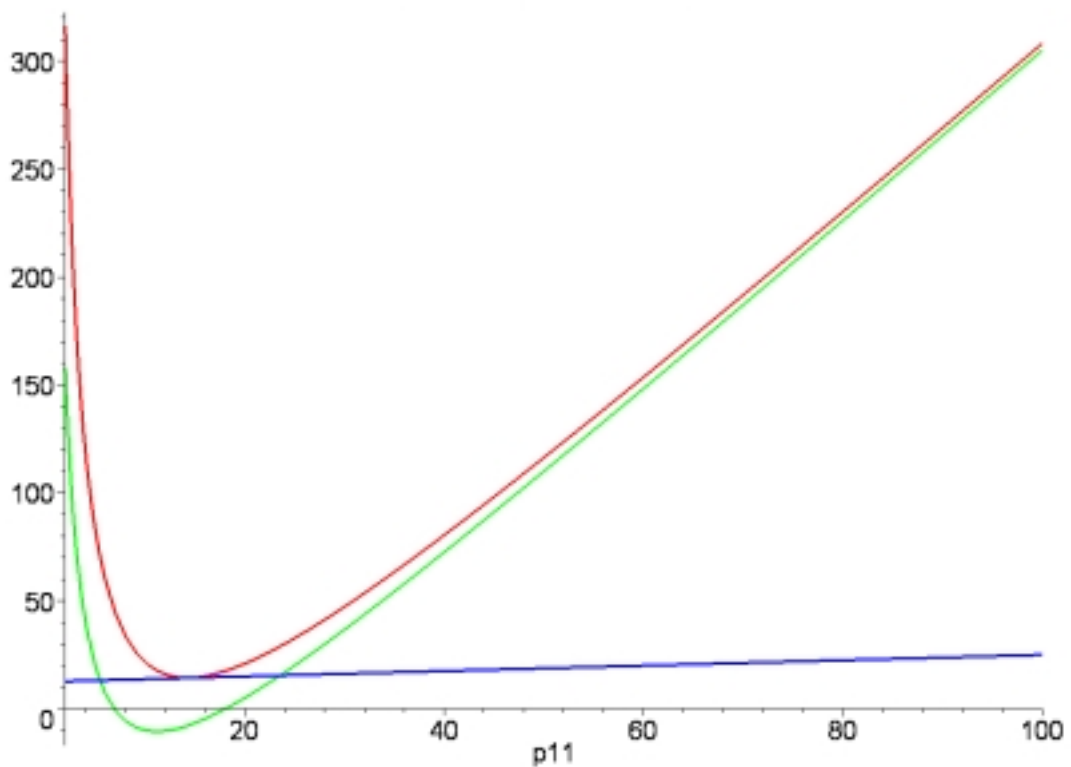
Ad esempio se prendiamo un isoprofitto che garantisce al leader un profitto di 500, e un isoprofitto che gli garantisce un profitto di 816.5322581 (che è quello di equilibrio in caso di price leadership) otteniamo la seguente rappresentazione grafica.

```
> iso2:=500/p11-100+4*p11;
```

```

iso2 := 500  $\frac{1}{p11}$  - 100 + 4 p11
> iso3 := 816.5322581/p11 - 100 + 4*p11;
iso3 := 816.5322581  $\frac{1}{p11}$  - 100 + 4 p11
> rea2 := 50/4 + 1/8*p11;
rea2 :=  $\frac{25}{2}$  +  $\frac{1}{8}$  p11
> plot({iso2,iso3,rea2},p11=2..100, color=[blue,red,green],
thickness=3, title="Equilibrio di price leadership");
Equilibrio di price leadership

```



I valori di equilibrio nel caso numerico sono infatti

```

> c:=1;
c := 1
> b:=4;
b := 4
> evalf(p1);
14.51612903
> evalf(p2);
14.31451613
> evalf(pi1);
816.5322581
> evalf(pi2);
819.6214880

```

[>
[pertanto in caso price leadership conviene essere follower.