
Work Breakdown Structure Diagramma di Gantt PERT/CPM

C. Noè

WBS

Si tratta di uno strumento di supporto alla scomposizione analitica di un progetto in tutte le sue parti.

Ciò facilita l'attribuzione di responsabilità a persone e di *budget* a sottoprogetti, la tempificazione del progetto, la valutazione delle *performance* di progetto.

WBS

Passi della WBS

1. Lista dei *task* in livelli successivi di dettaglio fino a quando si arrivi a *task* che possano essere organizzati, costificati, programmati e controllati singolarmente.
2. Per ciascun *task* identificare i dati rilevanti (p.e.: fornitori, durata, attrezzature, ecc.). Evidenziare enti e personale responsabili (matrice delle responsabilità) con le interrelazioni tra i vari enti interessati.
3. Riesame di ogni *task* con i rispettivi responsabili per valutarne l'accuratezza. I *task* approvati possono essere aggregati risalendo per i livelli gerarchici. Si otterrà la sintesi del progetto in termini di *budget* e di tempificazione.

WBS

4. Calcolo del costo complessivo del progetto valutando costi diretti, costi indiretti, costi di marketing, penali ed altri costi non attribuibili direttamente al singolo *task*, fondi per rischi, eventuale utile.
5. Definizione del *project master schedule* che comprende tutti gli elementi più significativi del progetto per quanto riguarda aspetti contrattuali, collegamenti tra enti, successione dei *task*, eventi critici, controllo dell'andamento e *reporting*.

Diagramma di Gantt (1917)

Strumento semplice di facile comprensione che, oltre che la successione di attività, può essere impiegato anche per rappresentare il carico di un reparto.

Attività: *task* del progetto che richiede tempo e risorse

Evento: istante al quale si chiudono una o più attività. Lo stato del sistema all'evento è chiaramente definibile.

Program Evaluation and Review Technique: PERT (1958)

Strumento per il *project management* che si fonda sulle tecniche reticolari

Il progetto è rappresentato con un grafo dove le attività sono raffigurate con archi orientati e gli eventi con nodi. Nei nodi convergono uno o più archi rappresentanti le attività, dai nodi dipartono uno o più archi rappresentanti le attività.

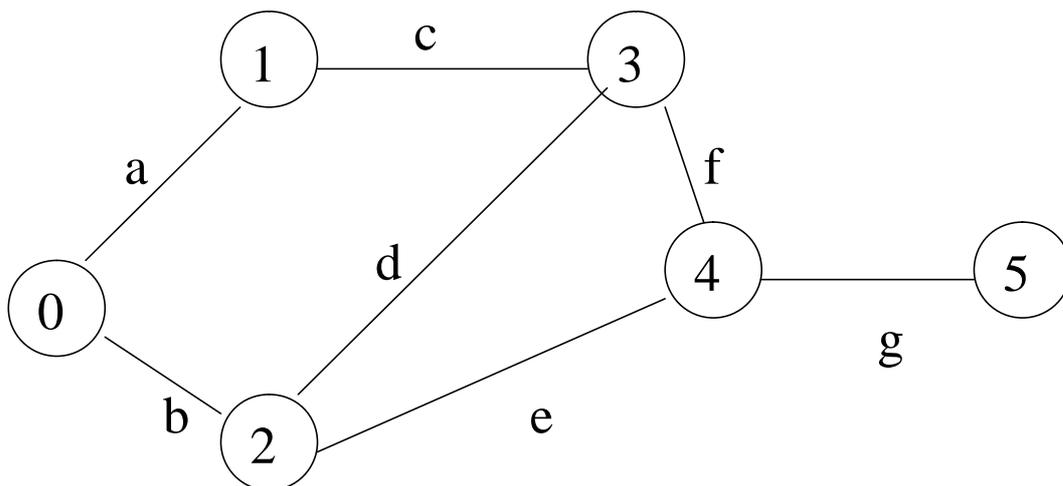
Program Evaluation and Review Technique: PERT

Per costruire un PERT si parte da una tabella nella quale sono elencate tutte le attività da svolgere con esplicitate le relazioni di precedenza tra di esse, i tempi per il loro svolgimento, le risorse necessarie ed i costi conseguenti

Attività	Precedenze	Tempo (gg.)	Risorse (persone)	Costo (Lit./giorno)
a	-	5	4	200000
b	-	10	2	300000
c	a	3	2	150000
d	b	2	6	200000
e	b	4	8	150000
f	c, d	6	1	400000
g	f, e	3	2	300000

Program Evaluation and Review Technique: PERT

Si passa quindi alla costruzione del grafo cercando di rispettare esattamente le relazioni di dipendenza tra le varie attività.

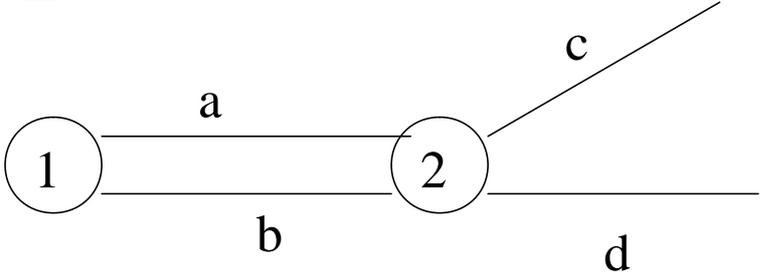


Qualora fosse necessario per evitare di esprimere legami in realtà non esistenti, si introducono attività fittizie (*dummy activity*), rappresentate con archi orientati tratteggiati, che hanno durata nulla ma servono esclusivamente per risolvere punti singolari.

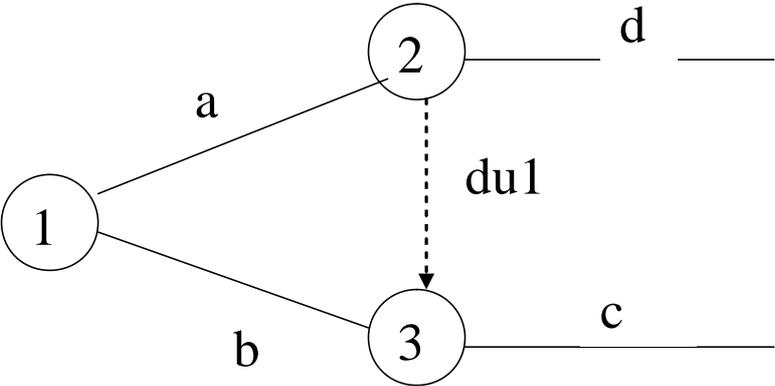
Attività	Precedenze
----------	------------

a	-
b	-
c	a, b
d	a

errato



corretto



Il passo successivo consiste nel calcolo del tempo previsto per il completamento del progetto.

Questo porta alla determinazione del percorso critico che unisce tra loro tutte le attività che svolte in successione senza soluzione di continuità condizionano direttamente la durata del progetto. L'aumento del tempo di svolgimento di una qualsiasi di tali attività comporta necessariamente un allungamento del tempo di completamento del progetto.

Per questo motivo questo strumento per il *project management* è noto anche come CPM (*Critical Path Method*) o, meglio, PERT/CPM. Il CPM infatti è stato sviluppato praticamente nello periodo del PERT ma da ricercatori diversi.

Per determinare quale siano le attività del percorso critico e calcolare il tempo complessivo di sviluppo del progetto un criterio consiste nel considerare tutti i percorsi che portano dall'evento di inizio all'evento di fine del progetto e sommare i tempi delle attività pertinenti. Il percorso critico è naturalmente quello con il tempo più elevato e le attività critiche sono quelle che via appartengono.

PERT/CPM

Facendo riferimento all'esempio precedente i percorsi da confrontare sono:

$$1) \quad a + c + f + g = 17$$

$$2) \quad b + d + f + g = 21$$

$$3) \quad b + e + g = 17$$

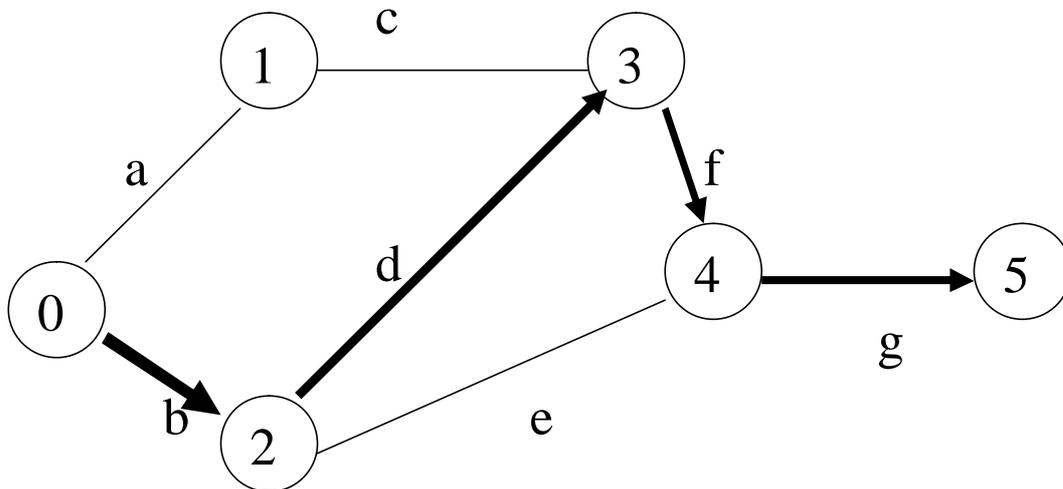
Il percorso critico è dunque quello determinato dalle attività sequenziali b, d, f, g.

La durata complessiva degli altri percorsi può aumentare in entrambi i casi di 4 senza determinare un allungamento dei tempi, ovvero l'istante d'inizio delle attività che li compongono può essere ritardato fino ad un massimo di 4.

Tuttavia, prestando attenzione alle composizioni dei percorsi, si può osservare che in realtà le operazioni che possono essere ritardate oppure allungate sono solamente la a e la c sul percorso 1) e la e sul percorso 3) in quanto le attività b, f e g fanno anche parte del percorso critico e, come già detto, un loro allungamento o ritardo comporta uno slittamento di tutto il progetto.

Il termine tecnico che indica la possibilità di ritardare l'inizio di un'attività è *slack* (l'attività e ha uno *slack* di 4).

PERT/CPM



Un altro modo per stabilire il percorso critico consiste nel determinare l'istante più anticipato e l'istante più ritardato di accadimento degli eventi (nodi).

Per calcolare gli istanti più anticipati occorre procedere dall'inizio del progetto verso il suo completamento applicando la seguente relazione:

$$T_{\min,x} = \max \left\{ T_{\min,h} + D_h \right\}$$

dove:

x è l'evento per il quale si sta calcolando l'istante più anticipato

$T_{\min,h}$ sono gli istanti più anticipati degli eventi dai quali hanno origine le attività confluenti nel nodo x

D_h sono le durate delle attività confluenti in x .

Quindi per il nostro esempio:

$$T_{\min,0} = 0$$

$$T_{\min,1} = 5$$

$$T_{\min,2} = 10$$

$$T_{\min,3} = \max \{5+3, 10+2\} = 12$$

$$T_{\min,4} = \max \{12+6, 10+4\} = 18$$

$$T_{\min,5} = 21$$

Per calcolare gli istanti più ritardati occorre invece procedere dall'evento di conclusione del progetto verso il suo inizio applicando la seguente relazione:

$$T_{\max,x} = \min \left\{ T_{\max,h} - D_h \right\}$$

dove:

x è l'evento per il quale si sta calcolando l'istante più ritardato

$T_{\max,h}$ sono gli istanti più ritardati degli eventi nei quali confluiscono le attività che hanno origine nel nodo x

D_h sono le durate delle attività che hanno origine in x .

Quindi per il nostro esempio:

$$T_{\max,5} = 21$$

$$T_{\max,4} = 18$$

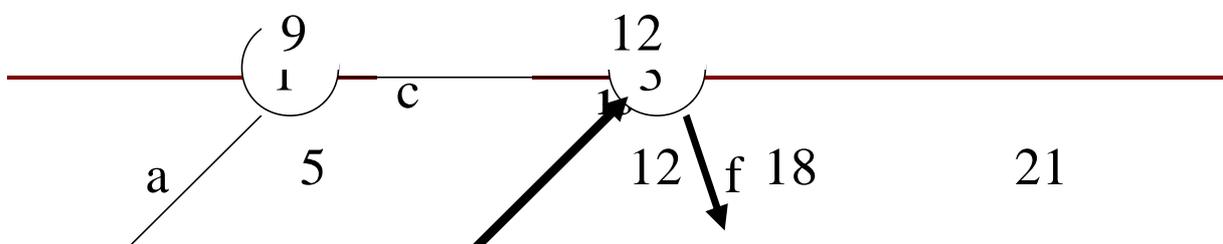
$$T_{\max,3} = 12$$

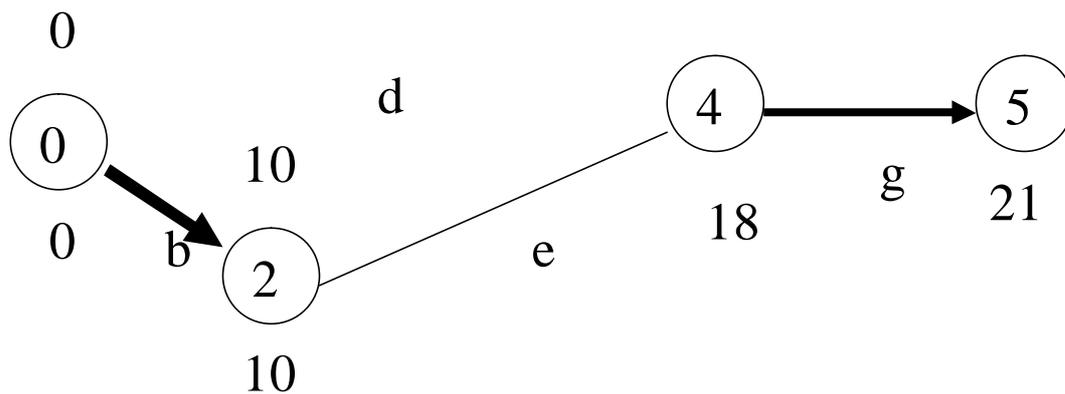
$$T_{\max,2} = \min \{18-4, 12-2\} = 10$$

$$T_{\max,1} = 9$$

$$T_{\max,0} = \min \{10-10, 9-5\} = 0$$

Possiamo riportare i tempi degli istanti più anticipati e più ritardati di accadimento degli eventi in corrispondenza dei nodi





Il percorso critico è quello che congiunge i nodi dove non esiste differenza tra istanti più anticipati e più ritardati di accadimento dell'evento. Ovviamente il percorso corrisponde a quello determinato seguendo l'altra modalità.

Se esiste una differenza tra istanti più anticipati e più ritardati di accadimento dell'evento, significa che è possibile ritardare l'inizio delle attività (*slack*) che concorrono e/o partono (a e c) dal nodo fino ad un valore massimo corrispondente alla differenza suddetta (p.e.: al nodo 1 per un tempo complessivo massimo di 4).

Si noti inoltre l'attività e. Congiunge due nodi che appartengono al percorso critico; tuttavia non fa parte del percorso critico perché, nel caso specifico, un ramo del grafo parallelo (le attività d + f) richiede un tempo superiore. Anche l'attività e ha pertanto uno *slack* libero che è pari alla differenza tra le durate delle attività sul ramo parallelo e dell'attività stessa ($2+6 - 4 = 4$).

Da notare infine che slittamenti superiori a quelli ammissibili possono trasformare in critici percorsi che non erano tali.

PERT/CPM

Il calcolo dei tempi attesi

Uno dei problemi più importanti nel *project management* è dato dall'attendibilità delle durate attribuite alle attività. Nella stragrande maggioranza dei casi tali tempi non sono assolutamente fissi ma possiedono una varianza a volte molto significativa. Quindi, per poter stimare i tempi di completamento di un progetto, occorre valutare i tempi attesi di svolgimento delle singole attività ed eventualmente stabilire, in un momento successivo, quanto sia affidabile il tempo conseguentemente determinato di durata del progetto.

Nell'ipotesi che la distribuzione dei tempi probabili sia simile a quella normale, un criterio per determinare empiricamente i tempi attesi delle attività e la loro varianza è il seguente.

$$TA = (T_{\min} + 4T_{\text{mod}} + T_{\max})/6$$

$$\sigma^2 = [(T_{\max} - T_{\min})/6]^2$$

dove:

TA = tempo atteso per lo svolgimento dell'attività

T_{\min} = tempo minimo necessario per il suo svolgimento

T_{mod} = tempo più frequente necessario per il suo svolgimento

T_{max} = tempo massimo necessario per il suo svolgimento

σ^2 = varianza del tempo necessario per il suo svolgimento

Riprendendo l'esempio potremmo costruire questa nuova tabella

Attività	Precedenze	Tempo minimo	Tempo moda	Tempo massimo	Tempo atteso	σ^2
a	-	3	5	7	5	0,45
b	-	8	10	12	10	0,45
c	a	2	3	4	3	0,11
d	b	1	2	3	2	0,11
e	b	1	4	7	4	1
f	c, d	5	6	7	6	0,11
g	f, e	3	3	3	3	0

Il percorso critico ed il tempo di completamento del progetto, determinati sui tempi attesi, rimangono gli stessi.

PERT/CPM

Valutazione dell'incertezza

Tuttavia, note le varianze dei tempi delle attività, potremmo valutare l'attendibilità del tempo atteso di completamento del progetto, ovvero la probabilità di completarlo entro una data assegnata o, ancora, nell'ipotesi di una quasi certezza di completamento, quale durata complessiva assumere come impegnativa.

Allora, se i tempi di svolgimento delle varie attività sono statisticamente indipendenti, la varianza di un insieme di attività è pari alla somma delle varianze delle singole attività.

Pertanto, se si volesse calcolare la probabilità di completare il progetto entro un certo periodo visto che le distribuzioni delle probabilità dei diversi tempi si possono ragionevolmente considerare normali, occorre determinare il fattore moltiplicativo Z della deviazione standard σ che delimita il campo delle occorrenze (probabilità di rispetto dell'ipotesi).

In sintesi, tornando all'esempio, vogliamo calcolare quale è la probabilità che il progetto si completi nel tempo massimo di 22 giorni tenuto conto che il tempo atteso di completamento del percorso critico è di 21 giorni.

Per calcolare il fattore moltiplicativo Z della deviazione standard si applica la relazione seguente:

$$Z = (TM - TPC) / (\sum \sigma_{PC}^2)^{1/2}$$

dove:

TM = tempo massimo = 22 gg

TPC = tempo atteso del percorso critico = 21 gg

$\sum \sigma_{PC}^2$ = sommatoria delle varianze dei tempi attesi estesa a tutte le attività (b, d, f, g) del percorso critico

Da cui:

$$Z = (22 - 21) / (0,67)^{1/2} = 1,49$$

Dalla tabella della probabilità cumulata per una distribuzione normale delle probabilità si legge in corrispondenza di 1,49 il valore 0,9319: il progetto ha una probabilità del 93,19% di essere completato entro 22 giorni.

Si può affrontare anche il problema inverso. Per esempio, entro quale tempo massimo si può completare lo stesso progetto con una probabilità del 98% ?

L'incognita diviene TM dato dall'espressione:

$$TM = Z \cdot (\sum \sigma_{PC}^2)^{1/2} + TPC$$

Dalla tabella della probabilità cumulata per una distribuzione normale delle probabilità si legge in corrispondenza di 0,98 il valore Z di 2,055.

Quindi,

$$TM = 2,055 \cdot (0,67)^{1/2} + 21 = 22,69 \text{ gg.}$$

Per avere la probabilità del 98% di completare il progetto senza oltrepassare il termine si deve ipotizzare un tempo di 22,69 giorni.

PERT/CPM

L'influenza dei percorsi non critici

Con i dati a disposizione si può anche valutare con quale probabilità un percorso non critico consenta il completamento del progetto entro il tempo obiettivo. Si dovrà seguire la stessa procedura cambiando opportunamente i dati.

Quindi, tornando al nostro esempio, si vuole valutare quale è la probabilità che il percorso non critico b + e + g (tempo atteso 17 gg.) consenta di completare il progetto nel tempo massimo di 22 gg. Si calcola la nuova Z data da:

$$Z = (TM - TPNC) / (\sum \sigma_{PNC}^2)^{1/2}$$

dove:

TM = tempo massimo = 22 gg

TPNC = tempo atteso del percorso non critico = 17 gg

$\sum \sigma_{PNC}^2$ = sommatoria delle varianze dei tempi attesi estesa a tutte le attività (b, e, g) del percorso non critico

Da cui:

$$Z = (22 - 17)/(1,45)^{1/2} = 4,15$$

Un fattore moltiplicativo di σ superiore a 4 copre praticamente la totalità delle occorrenze. Il progetto quindi non potrà ritardare a causa del percorso b + e + g.

Si può anche calcolare quale è la probabilità che il percorso non critico divenga tale attraverso l'espressione

$$Z = (TPC - TPNC)/(\sum \sigma_{PNC}^2)^{1/2}$$

dove:

TPC = tempo atteso del percorso critico = 21 gg

TPNC = tempo atteso del percorso non critico = 17 gg

$\sum \sigma_{PNC}^2$ = sommatoria delle varianze dei tempi attesi estesa a tutte le attività (b, e, g) del percorso non critico

Da cui:

$$Z = (21 - 17)/(1,45)^{1/2} = 0,96$$

Valore cui è associata una probabilità dell'83,15% di completare il progetto entro 21 giorni.

La probabilità di completare il progetto in 21 giorni secondo il percorso critico, dato che i tempi di svolgimento delle varie attività sono in linea di massima quelli più probabili, è del 50%.

Tuttavia, per valutare l'effettiva probabilità del completamento del progetto in 21 giorni, occorre considerare anche le probabilità di completamento del progetto negli stessi 21 giorni in funzione degli altri percorsi possibili.

In definitiva, qualora tali percorsi fossero tra loro indipendenti, la probabilità effettiva del completamento del progetto è data dal prodotto delle probabilità attribuibili a ciascun percorso.

Nel nostro caso i due percorsi non sono indipendenti (le attività b e g compaiono in entrambi); in ogni caso la probabilità effettiva di completamento in 21 giorni è sicuramente inferiore al 50%, ma non è neppure uguale al prodotto delle due probabilità.

Gantt vs. PERT/CPM

Vantaggi e svantaggi

In estrema sintesi:

- il PERT/CPM visualizza meglio i collegamenti tra le varie attività e consente di valutare più facilmente i percorsi critici.
- il Gantt offre un'idea più chiara sull'andamento del progetto e permette di controllare meglio i *budget* di risorse e conseguentemente di costi.
- è difficile rappresentare percorsi alternativi sia con il PERT/CPM che con il Gantt. Per questo motivi sono stati proposti anche altri strumenti (p.e.: GERT) che tuttavia non sono di uso così semplice e, quindi, non sono molto diffusi.