Esercizi e risultati sulle trasformazioni (o funzioni) non lineari di una variabile aleatoria discreta o continua (2° versione aggiornata)

1. Esercizi sulle trasformazioni non lineari di una variabile aleatoria.
2. Proprietà della variabile aleatoria logonormale e le sue applicazioni.
3. Una applicazione in finanza matematica delle variabili aleatorie normale e logonormale.

1. ESERCIZI

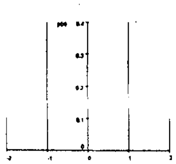
Exercise 1. *Determiare la variabile aleatoria Y funzione della variabile aleatoria X come qui sotto indicato. Dire se la tresformazione è biunivoca o no. Commentare come si è modificata la forma della funzione di probabilità di X per effetto della trasformazione. N.B.: poiché la variabile aleatoria X è simmetrica con un numero pari di valori possibili, la sua moda e la sua mediana sono state calcolate facendo la somma diviso 2 dei suoi due valori possibili centrali.*

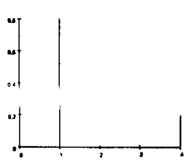
$$g(X) = X^2 = Y$$

$$x \in S_X = \{-2,-1,1,2\} \qquad y \in S_Y = \{1,4\}$$

$$p_X(x) = \begin{cases} .1 & x = -2,2 \\ .4 & x = -1,1 \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases} \quad \rightarrow \quad p_Y(y) = \begin{cases} .4+.4 = .8 & y = 1[= (-1)^2 = 1^2] \\ .1+.1 = .2 & y = 4[= (-2)^2 = 2^2] \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

$$Mod(X) = Med(X) = E(X) = 0 \qquad Mod(Y) = 1 = Med(Y) < E(Y) = 1.6$$





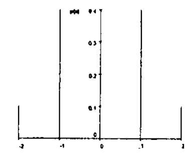
Exercise 2. *Determiare la variabile aleatoria Y funzione (o trasformazione) esponenziale della variabile aleatoria X come qui sotto indicato. Dire se la tresformazione è biunivoca o no. Commentare come si è modificata la forma della funzione di probabilità di Y per effetto della trasformazione* $[e = 2.71828182\ldots]$.

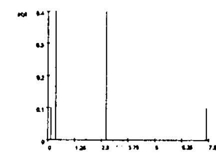
$$g(X) = e^X = Y$$

$$x \in S_X = \{-2,-1,1,2\} \qquad y \in S_Y = \{e^{-2}, e^{-1}, e, e^2\}$$

$$p_X(x) = \begin{cases} .1 & x = -2,2 \\ .4 & x = -1,1 \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases} \quad \rightarrow \quad p_Y(y) = \begin{cases} .1 & y = e^{-2}(=.135), e^2(= 7.389) \\ .4 & y = e^{-1}(=.368), e^1(= 2.718) \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

$$Mod(X) = Med(X) = E(X) = 0 \qquad Mod(Y) = 1.543 = Med(Y) < E(Y) = 1.987$$

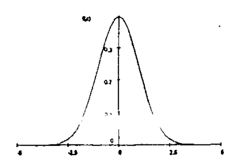


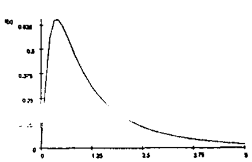


Exercise 3. *Il calcolo delle probabilità dimostra che se la lvariabile aleatoria X è funzione (o trasformazione) esponenziale della variabile aleatoria Z* ***normale*** *come qui sotto indicato, allora X è una variabile aleatoria* ***logonormale****. Dire se la trasformazione è biunivoca o no. Commentare come si è modificata la forma della funzione di densità di probabilità di Z per effetto della trasformazione*

$$g(Z) = e^Z = X$$

$$\left.\begin{array}{c} z \in S_Z = (-\infty,\infty) \\ f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \\ Z \sim N(0;1) \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} x \in S_X = (0,\infty) \\ f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x)^2}{2}} \frac{1}{x} \\ X \sim LN(0;1) \end{array}\right.$$





Come si vedrà nella prossima Sezione, la variabile aleatoria X è una variabile aleatoria logonormale anche quando la gaussiana all'esponente di e non è standardizzata. Nella prossima Sezione si vedranno anche alcuni tipici fenomeni e quantità aleatori dei quali la logonormale è un buon modello probabilistico.

2. PROPRIETA' DELLA VARIABILE ALEATORIA LOGONORMALE E LE SUE APPLICAZIONI

La variabile aleatoria logonormale è un buon modello probabilistico delle quantità aleatorie (con valori possibili positivi) per le quali è alta la probabilità che la quantità assuma valori piccoli e, viceversa, è bassa la probabilità che essa assuma valori grandi. In particolare ciò di solito accade per le seguenti **quantità aleatorie**:

(a) **il risarcimento danni che le compagnie di assicurazione devono pagare ai loro assicurati**; infatti per una data tipologia di polizza assicurativa è in generale più probabile osservare (perché hanno maggiore frequenza relativa) i risarcimenti di importo relativamente limitato che non quelli importo particolarmente elevato (che infatti hanno minore frequenza relativa).

(b) lo stesso dicasi per **il prezzo dei titoli azionari quotati in borsa** (si veda in proposito la Sezione 3)

(c) **il peso e la dimensione (volume, spessore, ecc.) dei frammenti o granuli in cui si scopone una certa quantità di materia allo stato solido in seguito a frattura, urto, ecc.**; infatti è più probabile osservare (perché hanno maggiore frequenza relativa) frammenti con peso e dimensione limitati che non con peso e dimensione particolarmente elevati (che infatti hanno minore frequenza relativa).

Le proprietà analitiche della variabile aleatoria logonormale sono date qui sotto

Proposition 1. *Data $W \sim N(\mu_W;\sigma_W^2)$, allora $X = g(W) = e^W$ è **logonormale di parametri** μ_W e σ_W^2. Ovvero*

$$W \sim N(\mu_W;\sigma_W^2) \quad \Rightarrow \quad X = g(W) = e^W \sim LN(\mu_W;\sigma_W^2)$$

La funzione di densità di probabilità di X logonormale è

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_W^2}} e^{-\frac{(\ln x-\mu_W)^2}{2\sigma_W^2}} \frac{1}{x} & x \in S_X = (0,\infty) \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Proposition 2. *Per $X = e^W \sim LN(\mu_W;\sigma_W^2)$ si ha*

$$P(X \le x) = P(W \le \ln x) = P\left(N(0;1) \le \frac{\ln x - \mu_W}{\sigma_W}\right)$$

Proposition 3. *Per $X = e^W \sim LN(\mu_W;\sigma_W^2)$ si ha*

$$Mod(X) < Med(X) < E(X)$$

ovvero rispettivamente

$$e^{\mu_W-\sigma_W^2} < e^{\mu_W} < e^{\mu_W+\frac{1}{2}\sigma_W^2}$$

Inoltre si ha

$$V(X) = E(X)^2\left(e^{\sigma_W^2} - 1\right)$$

Proposition 4. *Per $X = e^W \sim LN(\mu_W;\sigma_W^2)$ si ha che la trasformazione lineare $S = bX$*

($b > 0, a = 0$) di X logonormale è ancora logonormale con primo parametro $b + \mu_W$ anzichè μ_W ovvero

$$X = e^W \sim LN(\mu_W;\sigma_W^2) \Rightarrow S = (bX) \sim LN(b + \mu_W;\sigma_W^2)$$

con valore ateso $E(S)$ e varianza $V(S)$ seguenti

$$E(S) = be^{\mu_W+\frac{1}{2}\sigma_W^2} = e^{(\ln b+\mu_W)+\frac{1}{2}\sigma_W^2}, \quad V(S) = (E(S))^2\left(e^{\sigma_W^2} - 1\right)$$

Exercise 1. *Sia $S = bX$ con b =costante> 0 e con $X = e^W \sim LN(\mu_W;\sigma_W^2)$. come nella **Proposition 1**. Determinare $E(S)$ e $V(S)$.*

Soluzione. Per le proprietà di valore atteso e varianza di una trasformazione lineare e per la Proposition 3 si ottiene:

$E(S) = E(bX) = bE(X) = be^{\mu_W+\frac{1}{2}\sigma_W^2} = e^{\ln b}e^{\mu_W+\frac{1}{2}\sigma_W^2} = e^{(\ln b+\mu_W)+\frac{1}{2}\sigma_W^2}$

$V(S) = b^2V(X) = b^2(E(X))^2\left(e^{\sigma_W^2} - 1\right) = (bE(X))^2\left(e^{\sigma_W^2} - 1\right) = (E(S))^2\left(e^{\sigma_W^2} - 1\right)$.

Proposition 5. *Per $X = e^W \sim LN(\mu_W;\sigma_W^2)$ si ha*

$$W = g(X) = \ln X \sim N(\mu_W;\sigma_W^2)$$

3. UN' APPLICAZIONE IN FINANZA MATEMATICA DELLE VARIABILI ALEATORIE NORMALE E LOGONORMALE

In quanto segue si impiegherà (senza indagare sulla sua origine) la formula della finanza matematica che dà il valore s_t alla fine del periodo di tempo $(0,t]$ di un importo monetario s_0 (posseduto al tempo 0) quando si sappia che il rendimento in detto periodo $(0,t]$ è stato pari allo **r%**. **Per una elementare proprietà dei logaritmi ($s_0 = e^{\ln s_0}$) la formula finanziaria di cui si è detto si scrive, indifferentemente** (per una ben nota proprietà dei logarimi) nei seguenti due modi (1) e (2) equivalenti

$$s_t = g(r) = \begin{cases} s_0e^r = s_0y & (y = e^r)\ (1) \\ e^{\ln s_0+r} = e^w & (w = \ln s_0 + r)\ (2) \end{cases} \quad (s_0 > 0)\ (*)$$

dove in (1) s_t è una trsaformazione lineare di $y = e^r$ con pendenza $b = s_0$ e intercetta $a = 0$; in (2) l'esponente w è una trsformazione lineare di r con pendenza $b = 1$ e intercetta $a = \ln s_0$.

In particolare se l'importo monetario s_0 è il prezzo di un titolo azionario quotato in borsa, allora **all'inizio** del perido (al tempo 0) non sappiamo quale sarà il rendimento r nel periodo stesso e quindi non sappiamo nemmeno quale sarà il prezzo s_t del titolo **alla fine** t del periodo. Per conoscere tale rendimento r, e quindi il prezzo s_t del titolo, bisogna infatti attendere la fine t del periodo. In altre parole, come già sappiamo, **il rendimento del titolo è una variabile aleatoria**. Indicheremo detta variabile aleatoria con R che, come spesso si fa in finanza matematica, assumeremo essere una **normale** con valore atteso μ_R e varianza σ_R^2. Dunque, si assume R come qui sotto specificato il che (per le note proprietà delle trasf. lineari) dà inoltre l'implicazione sottoindicata :

$$R \sim N(\mu_R;\sigma_R^2),\quad \left(\mu_R = E(R),\ \sigma_R^2 = V(R)\right)$$
$$\Rightarrow\ W = (\ln s_0 + R) \sim N(\mu_W;\sigma_W^2),\quad \left(\mu_W = E(W) = \ln s_0 + \mu_R,\ \sigma_W^2 = \sigma_R^2\right)$$

Ritornando alla formula finanziaria (*) di s_t, essa fa dunque dipendere il prezzo s_t del titolo dal rendimento **aleatorio** R. Ma allora, come del resto già sapevamo, **anche il prezzo s_t del titolo è una variabile aleatoria** che indicheremo con S_t. Allora con la semplice sostituzione di s_t con S_t ed r con R, la formula finanziaria (*) del prezzo s_t del titolo (al tempo futuro $t > 0$) diventa la seguente funzione (o trasformazione) della variabile aleatoria normale R

$$S_t = g(R) = \begin{cases} s_0 e^R = s_0 Y & \left(Y = e^R \sim LN(\mu_R;\sigma_R^2)\right)\ (1) \\ e^{\ln s_0 + R} = e^W & \left(e^W \sim LN(\mu_W;\sigma_W^2),\ W = \ln s_0 + R\right)\ (2) \end{cases} \qquad (**)$$

dove, per una ben nota proprietà dei logarimi, le due formule (1) e (2) sono equivalenti e dove nelle formule tra parentesi si è fatto uso della **Proposition 1** della Sezione 2.

CONCLUSIONE: per le Proposition 1, 3, 4 e l'Exercise 1 della Sezione 2 precedente:
SE: il rendimento aleatorio R (nel periodo di tempo da zero a $t > 0$) è normale, ovvero SE: $R \sim N(\mu_R;\sigma_R^2)$
ALLORA: la quantità aleatoria (**) prezzo S_t del titolo (al tempo futuro $t > 0$) è logonormale con i due parametri e con prezzo medio atteso $E(S_t)$ e varanza $V(S_t)$ come qui sotto specificato

$$S_t \sim LN(\mu_W = \ln s_0 + \mu_R;\sigma_W^2 = \sigma_R^2)$$
$$E(S_t) = \mu_{S_t} = e^{(\ln s_0 + \mu_R) + \frac{1}{2}\sigma_R^2} = s_0 e^{\mu_R + \frac{1}{2}\sigma_R^2} \quad (***)$$
$$V(S_t) = \sigma_{S_t}^2 = (E(S_t))^2\left(e^{\sigma_R^2} - 1\right)$$

(In proposito si vedano le Proposition 1, 3, 4 e l'Exercise 1 della Sezione 2). La rilevanza di tale **CONCLUSIONE** stà nel fatto che ora siamo in grado di fare calcoli di grande importanza ai fini delle decisioni finanziarie circa il prezzo del titolo al tempo futuro $t > 0$ e, in particolare, di calcolare le quantità specificate in **(A)**, **(B)** e **(C)** qui sotto:

(A) la probabilità che il prezzo S_t del titolo alla fine del periodo non superi (oppure superi) una data quotazione s_t (vedi la Proposizione 2 della Sezione 2)

$$P(S_t \le s_t) = P(\ln s_0 + R \le \ln s_t) = P\left(N(0;1) \le \frac{\ln s_t - (\ln s_0 + \mu_R)}{\sigma_R}\right)$$
$$P(S_t \ge s_t) = 1 - P(S_t \le s_t)$$

(B) la probabilità che il prezzo S_t del titolo alla fine del periodo sia compreso fra due date quotazioni possibili s_t' e s_t'' ($s_t' < s_t''$), ovvero

$$P(s_t' \le S_t \le s_t'') = P(S_t \le s_t'') - P(S_t \le s_t'),\ s_t' < s_t''$$

(C) il prezzo medio atteso $E(S_t)$ del titolo alla fine del periodo e la sua varianza $V(S_t)$ le cui espressioni sono date nella formula (***) della **CONCLUSIONE** di cui sopra.

RENDIMENTO NORMALE e PREZZO LOGONORMALE
RIEPILOGO DELLE FORMULE

prezzo del titolo al tempo zero:	$s_0 > 0$
rendimento aleatorio del titolo dal tempo zero al tempo futuro $t > 0$:	$R \approx N(\mu_R;\sigma_R^2)$
rendimento medio atteso nel periodo da zero a $t > 0$:	$E(R) = \mu_R$
varianza del rendimento aleatorio nel periodo da zero a $t > 0$:	$V(R) = \sigma_R^2$

Il prezzo del titolo al tempo futuro $t > 0$ è la variabile aleatoria S_t seguente

$$S_t = g(R) = \begin{cases} s_0 e^R & (1) \\ e^{\ln s_0 + R} & (2) \end{cases} \quad (e = 2.718282)$$
$$S_t \approx LN\left(\ln s_0 + \mu_R;\sigma_R^2\right)$$

(le due formule (1) e (2) di S_t sono la stessa cosa, lo studente usi quella che preferisce) con prezzo medio atteso e varianza

$$\mu_{S_t} = E(S_t) = \begin{cases} s_0 e^{\mu_R + \frac{1}{2}\sigma_R^2} & (1) \\ e^{(\ln s_0 + \mu_R) + \frac{1}{2}\sigma_R^2} & (2) \end{cases},\quad \sigma_{S_t}^2 = V(S_t) = \left(\mu_{S_t}\right)^2\left(e^{\sigma_R^2} - 1\right)$$

(le due formule (1) e (2) di μ_{S_t} sono la stessa cosa, lo studente usi quella che preferisce).