**Università C.Cattaneo, Corso di laurea in Economia Aziendale, AA 2004-2005**
STATISTICA 1 - II prova parziale - 12.01.05
**SOLUZIONI Modalità A**

1. (Totale punti 10) Il tempo $X$ (in minuti) che intercorre fra due ordini consecutivi al magazzino dell'azienda AZ Spa è una quantità aleatoria continua con una certa densità di probabilità $f_X(x)$ e valori possibili $x \in [0, \infty)$.
   - **a.** (Punti 2) Il grafico qui sotto dà la rappresentazione grafica della densità di probabilità $f_X(x)$. Indicare in detto grafico la probabilità dell'evento "$5 \leq X \leq 10$"

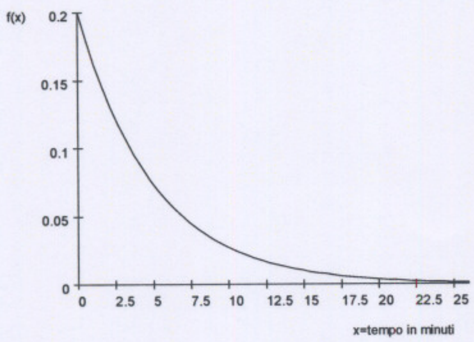
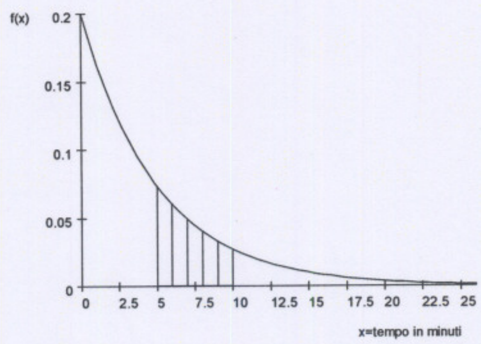



grafico della densità di probabilità $f_X(x)$




$P(5 \leq X \leq 10)$= area sopra $[5, 10]$

   - **b.** (Punti 2) Utilizzando il simbolo $f_X(x)$ della densità di probabilità, scrivere la formula per il calcolo di $P(5 \leq X \leq 10)$

$$P(5 \leq X \leq 10) = \text{area sopra } [5,10] = \int_5^{10} f_X(x)dx, \text{ oppure}$$

$$P(5 \leq X \leq 10) = \text{area sopra } [5,10] = \int_0^{10} f_X(x)dx - \int_0^{5} f_X(x)dx$$

   - **c.** (Punti 2+1+1) Per la variabile aleatoria $X$ di cui sopra è $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ e $med(X) = -\frac{1}{\lambda}\ln 0.5$ (con $\lambda = 0.2$). Per $X$ detreminare il valore numerico di moda, mediana e del tempo medio atteso (in minuti) che intercorre fra due ordini consecutivi.

$$\text{mod}(X) = 0,\ med(X) = -\tfrac{1}{\lambda}\ln 0.5 = -5 \times (-0.693) = 3.465$$

$$\text{tempo medio atteso fra due ordini consecutivi} = E(X) = \tfrac{1}{\lambda} = \tfrac{10}{2} = 5 \text{ minuti}$$

   - **d.** (Punti 2) Indipendentemente dai valori numerici di valore atteso, moda e mediana ottenuti in (c), dire in base al grafico di cui sopra di $f_X(x)$ quale delle due relazioni (1) e (2) seguenti dovrebbe risultare verificata (sottolineare la relazione prescelta)

$$(1)\ E(X) \leq med(X) \leq \text{mod}(X),\ (2)\ \text{mod}(X) \leq med(X) \leq E(X)$$

     Sottolineare la relazione (2).

2. (Punti 3) Il tempo $X$ (in minuti) che intercorre fra due ordini consecutivi al magazzino dell'azienda AZ Spa, è una quantità aleatoria tale che: $P(X \geq x) = e^{-\lambda x}$ $\left(\text{dove: } x \geq 0,\ \lambda = 0.2,\ e = 2.7183\right)$. Determinare il valore numerico della seguente probabilità: $P(X \leq 2)$

$$P(X \leq 2) = 1 - P(X \geq 2) = 1 - e^{-\lambda 2} = 1 - e^{-0.2\times 2} = 1 - e^{-0.4} = 1 - 0.670 = 0.330$$

3. (Punti 3) Il rendimento $R$ del titolo azionario dell'azienda AZ Spa in un certo intervallo di tempo $(0, t]$ è una quantità aleatoria normale con valore atteso $\mu_R = 0.04$ e varianza $\sigma_R^2 = 0.04$. Determinare il valore numerico della seguente probabilità: $P(R \leq 0.08)$

$$P(R \leq 0.08) = P\left(N(0;1) \leq \tfrac{0.08-\mu_R}{\sigma_R}\right) =$$

$$= P(N(0;1) \leq \tfrac{0.08-0.04}{0.2}) = P(N(0;1) \leq 0.2) = 0.579$$

4. (Totale punti 2) Per il titolo azionario dell'azienda AZ Spa si sa che il suo prezzo $S_t$ al tempo futuro $t > 0$ è una quantità aleatoria $S_t$. che dipende suo rendimento aleatorio $R$ (vedi domanda (3) sopra) secondo la seguente relazione: $S_t = g(R) = s_0 e^R$ dove $s_0$ è il prezzo che il titolo ha avuto al tempo iniziale "zero".
   a. (Punti 1) "La relazione tra $S_t$ e $R$ è lineare": VERO FALSO (sottolineare la risposta prescelta): sottolineare FALSO.
   b. (Punti 1) "La relazione tra $S_t$ e $e^R$ è lineare": VERO FALSO (sottolineare la risposta prescelta): sottolineare VERO.
5. (Punti 2) Si consideri la quantità aleatoria $Y = e^R$ con $R \sim N(\mu_R = 0.04; \sigma_R^2 = 0.04)$. E' noto che $Y$ è una quantità aleatoria logonormale con parametri $\mu_R$ e $\sigma_R^2$, ovvero $Y \sim LN(\mu_R; \sigma_R^2)$. Si considerino le seguenti equaglianze: $P(Y < 1) = P(R < ?) = P(N(0;1) < !)$
   Cosa bisogna scrivere rispettivamente al posto del punto interrogativo e di quello esclamativo affichè le due eguaglianze siano vere?
   $$? = \ln 1 = 0, \ \ ! = \frac{\ln 1 - \mu_R}{\sigma_R} = \frac{\ln 1 - 0.04}{0.2} = -0.2$$
6. (Totale punti 6)
   a. (Punti 2) La relazione tra le variabili aleatorie $Y$ e $X$ è: $Y = \frac{1}{2}X - 1$. Determinare $E(Y)$ sapendo che $E(X) = 2$.
   $$E(Y) = \frac{1}{2}E(X) - 1 = \frac{1}{2}2 - 1 = 0$$
   b. (Punti 2) La relazione tra le variabili aleatorie $W$ e $S$ è: $W = -2S + 1$. Determinare $V(W)$ sapendo che $V(S) = 0.21$.
   $$V(W) = (-2)^2 V(S) = 4 \times 0.21 = 0.84$$
   c. (Punti 2) Della variabile aleatoria $W$ di cui in (b) determinare i valori possibili $w$ e la loro probabilità $p_W(w)$ sapendo che $S \sim Be(0.3)$
   $$w = -2s + 1 = \begin{cases} 1 & s = 0 \\ -1 & s = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_W(1) = p_S(0) = 1 - 0.3 = 0.7 \\ p_W(-1) = p_S(1) = 0.3 \end{cases}$$
7. (Totale punti 4) Il vettore aleatorio $(X, Y)$ ha la seguente funzione di probabilità congiunta
   $$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{27} & (x,y) = (0,0) \\ \frac{8}{27} & (x,y) = (0,1),(1,0) \\ \frac{10}{27} & (x,y) = (1,1) \\ 0 & altrove \end{cases}$$
   a. (Punti 2) Determinare il valore numerico della seguente probabilità: $P(X = 1)$.
   $$P(X = 1) = p_{XY}(1,0) + p_{XY}(1,1) = \frac{8}{27} + \frac{10}{27} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3} = 0.667$$
   b. (Punti 2) Determinare il valore numerico della seguente probabilità: $P(S = 2)$ dove $S = g(X, Y) = X + Y$.
   $$P(S = 2) = P(X + Y = 2) = p_{XY}(1,1) = \frac{10}{27} = 0.370$$