Università C.Cattaneo, Corso di laurea in Economia Aziendale, AA 2004-2005

STATISTICA 1 - II prova parziale - 12.01.05

SOLUZIONI Modalità B

1. (Totale punti 10) Il tempo X (in minuti) che intercorre fra due ordini consecutivi al magazzino dell'azienda BZ Spa è una quantità aleatoria continua con una certa densità di probabilità $f_X(x)$ e valori possibili $x \in [0, \infty)$.

a. (Punti 2) Il grafico qui sotto dà la rappresentazione grafica della densità di probabilità $f_X(x)$. Indicare in detto grafico la probabilità dell'evento "$X \leq 5$"

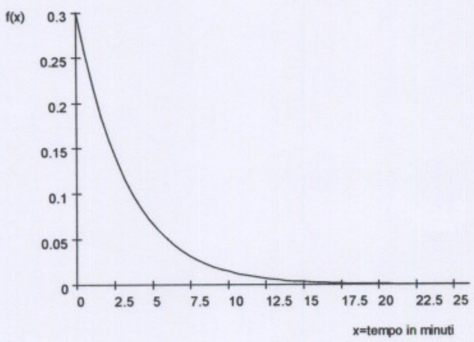
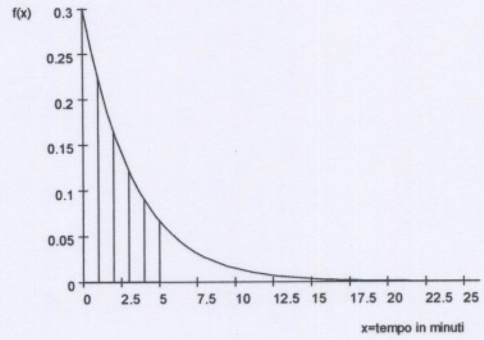


grafico della densità di probabilità $f_X(x)$



$P(X \leq 5)$= area sopra $[0, 5]$

b. (Punti 2) Utilizzando il simbolo $f_X(x)$ della densità di probabilità, scrivere la formula per il calcolo di $P(X \leq 5)$

$$P(X \leq 5) = \text{area sopra } [0,5] = \int_0^5 f_X(x)dx$$

c. (Punti 2+1+1) Per la variabile aleatoria X di cui sopra è $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ e $med(X) = -\frac{1}{\lambda}\ln 0.5$ (con $\lambda = 0.3$). Per X detreminare il valore numerico di moda, mediana e del tempo medio atteso(in minuti) che intercorre fra due ordini consecutivi.

$$\text{mod}(X) = 0,\ med(X) = -\frac{1}{\lambda}\ln 0.5 = -3.333 \times (-0.693) = 2.310$$

$$\text{tempo medio atteso fra due ordini consecutivi} = E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{10}{3} = 3.333 \text{ minuti}$$

d. (Punti 2) Indipendentemente dai valori numerici di valore atteso, moda e mediana ottenuti in (c), dire in base al grafico di cui sopra di $f_X(x)$ quale delle due relazioni (1) e (2) seguenti dovrebbe risultare verificata (sottolineare la relazione prescelta)

$$(1)\ \text{mod}(X) \leq med(X) \leq E(X),\quad (2)\ E(X) \leq med(X) \leq \text{mod}(X)$$

Sottolineare la relazione (1).

2. (Punti 3) Il tempo X (in minuti) che intercorre fra due ordini consecutivi al magazzino dell'azienda BZ Spa, è una quantità aleatoria tale che: $P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $\left(\text{dove: } x \geq 0,\ \lambda = 0.3,\ e = 2.7183\right)$. Determinare il valore numerico della seguente probabilità: $P(X \geq 2)$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (1 - e^{-\lambda 2}) = e^{-0.3 \times 2} = e^{-0.6} = 0.549$$

3. (Punti 3) Il rendimento R del titolo azionario dell'azienda BZ Spa in un certo intervallo di tempo $(0, t]$ è una quantità aleatoria normale con valore atteso $\mu_R = 0.09$ e varianza $\sigma_R^2 = 0.09$. Determinare il valore numerico della seguente probabilità: $P(R \leq 0.09)$

$$P(R \leq 0.09) = P\left(N(0;1) \leq \frac{0.09 - \mu_R}{\sigma_R}\right) =$$

$$= P(N(0;1) \leq \frac{0.09 - 0.09}{0.3}) = P(N(0;1) \leq 0) = 0.5$$

4. (Totale punti 2) Per il titolo azionario dell'azienda BZ Spa si sa che il suo prezzo S_t al tempo futuro $t > 0$ è una quantità aleatoria S_t. che dipende suo rendimento aleatorio R (vedi domanda

(3) sopra) secondo la seguente relazione: $S_t = g(R) = s_0 e^R$ dove s_0 è il prezzo che il titolo ha avuto al tempo iniziale "zero".

a. (Punti 1) "La relazione tra S_t e e^R è lineare": VERO FALSO (sottolineare la risposta prescelta): sottolineare VERO.

b. (Punti 1)"La relazione tra S_t e R è lineare": VERO FALSO (sottolineare la risposta prescelta): sottolineare FALSO.

5. (Punti 2) Si consideri la quantità aleatoria $Y = e^R$ con $R \sim N(\mu_R = 0.09; \sigma_R^2 = 0.09)$. E' noto che Y è una quantità aleatoria logonormale con parametri μ_R e σ_R^2, ovvero $Y \sim LN(\mu_R; \sigma_R^2)$. Si considerino le seguenti equaglianze: $P(Y < 0.5) = P(R < !) = P(N(0;1) < ?)$

Cosa bisogna scrivere rispettivamente al posto del punto esclamativo e di quello interrogativo affichè le due eguaglianze siano vere?

$$! = \ln 0.5 = -0.693,\ \ ? = \frac{\ln 0.5 - \mu_R}{\sigma_R} = \frac{-0.693 - 0.04}{0.2} = -\frac{0.733}{0.2} = -3.665$$

6. (Totale punti 6)

a. (Punti 2) La relazione tra le variabili aleatorie Y e X è: $Y = -2X + 1$. Determinare $V(Y)$ sapendo che $V(X) = \frac{1}{4}$.

$$V(Y) = (-2)^2 V(X) = 4\frac{1}{4} = 1$$

b. (Punti 2) La relazione tra le variabili aleatorie W e S è: $W = \frac{1}{2}S - 1$. Determinare $E(W)$ sapendo che $E(S) = 0.7$.

$$E(W) = \frac{1}{2}E(S) - 1 = \frac{1}{2}0.7 - 1 = -0.65$$

c. (Punti 2) Della variabile aleatoria W di cui in (b) determinare i valori possibili w e la loro probabilità $p_W(w)$ sapendo che $S \sim Be(0.7)$

$$w = \frac{1}{2}s - 1 = \begin{cases} -1 & s = 0 \\ -0.5 & s = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_W(-1) = p_S(0) = 1 - 0.7 = 0.3 \\ p_W(-0.5) = p_S(1) = 0.7 \end{cases}$$

7. (Totale punti 4) Il vettore aleatorio (X, Y) ha la seguente funzione di probabilità congiunta

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{27} & (x,y) = (0,0) \\ \frac{8}{27} & (x,y) = (0,1),(1,0) \\ \frac{10}{27} & (x,y) = (1,1) \\ 0 & altrove \end{cases}$$

a. (Punti 2) Determinare il valore numerico della seguente probabilità: $P(Y = 0)$.

$$P(Y = 0) = p_{XY}(0,0) + p_{XY}(1,0) = \frac{1}{27} + \frac{8}{27} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3} = 0.333$$

b. (Punti 2) Determinare il valore numerico della seguente probabilità: $P(W = 0)$ dove $W = g(X, Y) = Y + X$.

$$P(W = 0) = P(Y + X = 0) = p_{XY}(0,0) = \frac{1}{27} = 0.037$$