Università C.Cattaneo, Corso di laurea in Economia Aziendale, AA 2004-2005
STATISTICA 1 - II prova parziale - 12.01.05
SOLUZIONI Modalità C

1. (Totale punti 10) Il tempo X (in minuti) che intercorre fra due ordini consecutivi al magazzino dell'azienda CZ Spa è una quantità aleatoria continua con una certa densità di probabilità $f_X(x)$ e valori possibili $x \in [0, \infty)$.

   a. (Punti 2) Il grafico qui sotto dà la rappresentazione grafica della densità di probabilità $f_X(x)$. Indicare in detto grafico la probabilità dell'evento "$X \geq 12.5$"

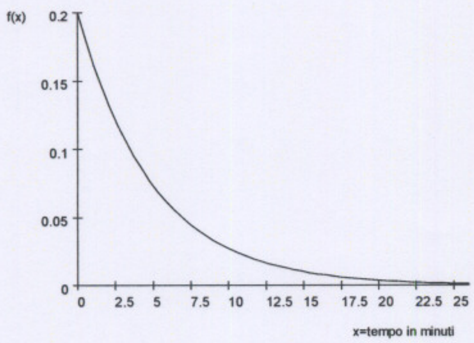
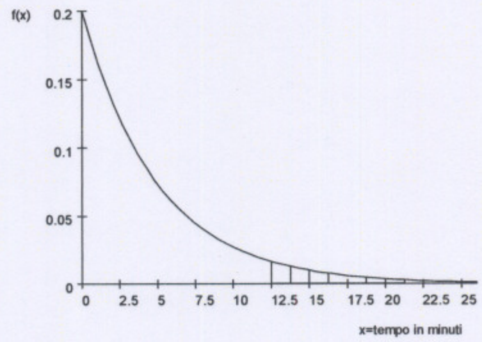


grafico della densità di probabilità $f_X(x)$



$P(X \geq 12.5)$=area sopra $[12.5, \infty)$

   b. (Punti 2) Utilizzando il simbolo $f_X(x)$ della densità di probabilità, scrivere la formula per il calcolo di $P(X \geq 12.5)$

$$P(X \geq 12.5) = \text{area sopra } [12.5, \infty) = \int_{12.5}^{\infty} f_X(x)dx$$

   c. (Punti 2+1+1) Per la variabile aleatoria X di cui sopra è $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ e $med(X) = -\frac{1}{\lambda}\ln 0.5$ (con $\lambda = 0.2$). Per X detreminare il valore numerico di moda, mediana e del tempo medio atteso (in minuti) che intercorre fra due ordini consecutivi.

$$\text{mod}(X) = 0,\ med(X) = -\tfrac{1}{\lambda}\ln 0.5 = -5 \times (-0.693) = 3.465$$

$$\text{tempo medio atteso fra due ordini consecutivi} = E(X) = \tfrac{1}{\lambda} = \tfrac{10}{2} = 5 \text{ minuti}$$

   d. (Punti 2) Indipendentemente dai valori numerici di valore atteso, moda e mediana ottenuti in (c), dire in base al grafico di cui sopra di $f_X(x)$ quale delle due relazioni (1) e (2) seguenti dovrebbe risultare verificata (sottolineare la relazione prescelta)

$$(1)\ E(X) \leq med(X) \leq \text{mod}(X),\ (2)\ \text{mod}(X) \leq med(X) \leq E(X)$$

   Sottolineare la relazione (2).

2. (Punti 3) Il tempo X (in minuti) che intercorre fra due ordini consecutivi al magazzino dell'azienda CZ Spa, è una quantità aleatoria tale che: $P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$ (dove: $x \geq 0$, $\lambda = 0.2$, $e = 2.7183$). Determinare il valore numerico della seguente probabilità: $P(1 \leq X \leq 2)$

$$P(1 \leq X \leq 2) = 1 - e^{-\lambda 2} - (1 - e^{-\lambda}) = e^{-\lambda} - e^{-\lambda 2} = e^{-0.2} - e^{-0.4} = 0.819 - 0.670 = 0.149$$

3. (Punti 3) Il rendimento R del titolo azionario dell'azienda CZ Spa in un certo intervallo di tempo $(0, t]$ è una quantità aleatoria normale con valore atteso $\mu_R = 0.04$ e varianza $\sigma_R^2 = 0.04$. Determinare il valore numerico della seguente probabilità: $P(R \geq 0.08)$

$$P(R \geq 0.08) = 1 - P(R \leq 0.08) = 1 - P\left(N(0;1) \leq \tfrac{0.08-\mu_R}{\sigma_R}\right) =$$

$$= 1 - P(N(0;1) \leq \tfrac{0.08-0.04}{0.2}) = 1 - P(N(0;1) \leq 0.2) = 1 - 0.579 = 0.421$$

4. (Totale punti 2) Per il titolo azionario dell'azienda CZ Spa si sa che il suo prezzo S_t al tempo futuro $t > 0$ è una quantità aleatoria S_t. che dipende suo rendimento aleatorio R (vedi domanda

(3) sopra) secondo la seguente relazione: $S_t = g(R) = s_0 e^R$ dove s_0 è il prezzo che il titolo ha avuto al tempo iniziale "zero".

a. (Punti 1) "La relazione tra S_t e R è lineare": VERO FALSO (sottolineare la risposta prescelta): sottolineare FALSO.

b. (Punti 1) "La relazione tra S_t e e^R è lineare": VERO FALSO (sottolineare la risposta prescelta): sottolineare VERO.

5. (Punti 2) Si consideri la quantità aleatoria $Y = e^R$ con $R \sim N(\mu_R = 0.04; \sigma_R^2 = 0.04)$. E' noto che Y è una quantità aleatoria logonormale con parametri μ_R e σ_R^2, ovvero $Y \sim LN(\mu_R; \sigma_R^2)$. Si considerino le seguenti equaglianze: $P(Y < 1.0408) = P(R < ?) = P(N(0;1) < !)$

Cosa bisogna scrivere rispettivamente al posto del punto interrogativo e di quello esclamativo affichè le due eguaglianze siano vere?

$$? = \ln 1.0408 = 0.04, \quad ! = \frac{\ln 1.0408 - \mu_R}{\sigma_R} = \frac{0.04 - 0.04}{0.2} = 0$$

6. (Totale punti 6)

a. (Punti 2) La relazione tra le variabili aleatorie Y e X è: $Y = \frac{1}{3}X - 1$. Determinare $E(Y)$ sapendo che $E(X) = 6$.

$$E(Y) = \frac{1}{3}E(X) - 1 = \frac{1}{3}6 - 1 = 1$$

b. (Punti 2) La relazione tra le variabili aleatorie W e S è: $W = -S + 1$. Determinare $V(W)$ sapendo che $V(S) = 0.09$.

$$V(W) = (-1)^2 V(S) = 0.09$$

c. (Punti 2) Della variabile aleatoria W di cui in (b) determinare i valori possibili w e la loro probabilità $p_W(w)$ sapendo che $S \sim Be(0.1)$

$$w = -s + 1 = \begin{cases} 1 & s = 0 \\ 0 & s = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_W(1) = p_S(0) = 1 - 0.1 = 0.9 \\ p_W(0) = p_S(1) = 0.1 \end{cases}$$

7. (Totale punti 4) Il vettore aleatorio (X, Y) ha la seguente funzione di probabilità congiunta

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{27} & (x,y) = (0,0) \\ \frac{8}{27} & (x,y) = (0,1),(1,0) \\ \frac{10}{27} & (x,y) = (1,1) \\ 0 & altrove \end{cases}$$

a. (Punti 2) Determinare il valore numerico della seguente probabilità: $P(X = 0)$.

$$P(X = 0) = p_{XY}(0,0) + p_{XY}(0,1) = \frac{1}{27} + \frac{8}{27} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3} = 0.333$$

b. (Punti 2) Determinare il valore numerico della seguente probabilità: $P(S = 0)$ dove $S = g(X, Y) = X + Y$.

$$P(S = 0) = P(X + Y = 0) = p_{XY}(0,0) = \frac{1}{27} = 0.037$$