

UNIVERSITA' CARLO CATTANEO Corso di laurea in Economia Aziendale

Prova di Statistica I – 17 febbraio 2005 Modalità A

NB: (A) ai fini della valutazione verranno considerate solo le risposte riportate dallo studente negli appositi riquadri bianchi del testo d'esame. (B) nello svolgimento del compito, si utilizzino quattro cifre decimali dopo la virgola.

COGNOME..... NOME..... MATR.....

ESERCIZIO 1 (6 punti) Nell'intervallo di tempo $[0, t]$ un titolo ha prezzo iniziale $P_0 = 10$ e rendimento R gaussiano con media 0.3 e varianza 0.09. Il prezzo finale (al tempo t) è $P_t = P_0 e^R$.

- Si calcoli la probabilità che il rendimento sia inferiore a 0.5 (**4 punti**).
- Si calcoli la probabilità che il prezzo finale sia maggiore di 20 (**2 punti**).

a)

$$P(R < 0.5) = P\left(\frac{R - 0.3}{0.3} < \frac{0.5 - 0.3}{0.3}\right) = P(Z < 0.6667) = 0.7475$$
, essendo Z una variabile aleatoria con distribuzione gaussiana standard.

b)

$$P(P_t > 20) = P(P_0 e^R > 20) = P(e^R > 20 / P_0) = P(e^R > 2) = P(R > \log 2) = P(R > 0.6931) =$$

$$= P\left(Z > \frac{0.6931 - 0.3}{0.3}\right) = P(Z > 1.3103) = 0.0951.$$

essendo Z una variabile aleatoria con distribuzione gaussiana standard.

ESERCIZIO 2 (10 punti) Due variabili aleatorie X e Y sono stocasticamente indipendenti; X ha distribuzione binomiale di parametri 2 e 0.25, Y ha distribuzione bernoulliana di parametro 0.5.

- Si calcoli la probabilità che X sia maggiore di zero (**3 punti**).
- Si calcoli $P(X=1, Y=1)$ (**3 punti**).
- Si scriva la funzione di probabilità della variabile aleatoria $Z=2Y-2$ (**2 punti**).

d) Si calcoli la varianza della variabile aleatoria $W=1-Y/2$ (2 punti).

a) $P(X > 0) = P(X = 1) + P(X = 2) = 2 * (0.25)^1 * (0.75)^1 + (0.25)^2 * (0.75)^0 = 0.375 + 0.0625 = 0.4375.$

b) $P(X=1, Y=1) = P(X=1)P(Y=1) = (2 * (0.25) * (0.75)) * (0.5) = 0.1875.$

La prima uguaglianza segue dall'indipendenza di X e Y.

c) La distribuzione di Z è:

valori	probabilità
-2	0.5
0	0.5

d) $Var(W) = Var(Y)/4 = (0.5 * 0.5)/4 = 0.0625$; la prima uguaglianza segue dalle proprietà della varianza per trasformazioni lineari, la seconda dalla formula per la varianza di una variabile aleatoria con distribuzione bernoulliana.

ESERCIZIO 3 (8 punti) I quattro bar di un piccolo paese hanno venduto, il 10 febbraio 2005, rispettivamente 20, 25, 10 e 45 caffè. **(a) (2 punti)** Si calcoli il numero medio di caffè venduti il 10 febbraio 2005. **(b) (2 punti)** Si calcolino le coordinate della curva di concentrazione del numero di caffè venduti il 10 febbraio 2005. **(c) (2 punti)** Si calcoli, sulla base delle quantità in b), un indice di concentrazione. **(d) (2 punti)** Il numero di caffè venduti dagli stessi 4 bar il 9 febbraio 2005 ha media 30 e varianza 144. Si confronti la variabilità (dispersione) del numero di caffè venduti il 9 febbraio e il 10 febbraio.

a) La media è $M = (20 + 25 + 10 + 45)/4 = 25.$

b)

F	Q
0	0
0.25	10/100=0.1
0.5	30/100=0.3
0.75	55/100=0.55
1	1

c) Il rapporto di concentrazione di Gini è: $R = \frac{\sum_1^{n-1} (F_i - Q_i)}{\sum_1^{n-1} F_i} = \frac{0.15 + 0.2 + 0.2}{0.25 + 0.5 + 0.75} = \frac{0.55}{1.5} = 0.3667.$ Il livello

di concentrazione è medio-basso.

d) Il coefficiente di variazione del numero di caffè venduti il 9 febbraio è $\frac{SQM}{MEDIA} = \frac{12}{30} = 0.4.$ Il

coefficiente di variazione del numero di caffè venduti il 10 febbraio è

$\frac{SQM}{MEDIA} = \frac{\sqrt{((20 - 25)^2 + (25 - 25)^2 + (10 - 25)^2 + (45 - 25)^2)/4}}{25} = \frac{\sqrt{162.5}}{25} = 0.5099.$ Quindi è maggiore la dispersione del numero di caffè venduti il 10 febbraio.

ESERCIZIO 4 (6 punti) Si lancia 3 volte una moneta regolare. Sia X il numero di teste ottenute nei tre lanci.

- a) Si scriva la funzione di probabilità di X (**2 punti**).
- b) Si calcoli la probabilità che solamente il primo lancio dia testa (**2 punti**).
- c) Si calcoli il valore atteso della variabile Y="numero di croci" (**2 punti**).

$$a) p(x) = \begin{cases} 1/8 & x = 0 \\ 3/8 & x = 1 \\ 3/8 & x = 2 \\ 1/8 & x = 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

b) La probabilità è 1/8, che corrisponde alla probabilità della sequenza TCCC.

c) $E(Y) = 3 * 0.5 = 1.5$, in quanto Y ha (come X) distribuzione binomiale di parametri 3 e 0.5.