Derivate

A. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

1) $y = 3x^2 - 6x + 3$ 2) $y = e^x + 2x - \ln x$ 3) $y = xe^x + 2$

4) $y = x^2 + 1 + \ln(3x - 2)$ 5) $y = (1 - 3x)e^{7-5x}$ 6)) $\dfrac{1}{(6x-2)^2} - \dfrac{1}{5-x}$

7) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{\sqrt[5]{x^2}}$ 8) $y = \sqrt[4]{2x+1} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{x^3}$ 9) $y = e^{-x} + \ln(3x + 4)$

10) $y = \dfrac{x}{x - e^x}$ 11) $y = e^{2x+x^2}$ 12) $y = \dfrac{1-x}{2x+1}$

13) $y = \ln x + \dfrac{x}{x^2 + 2x - 3}$ 14) $y = \dfrac{x^2+3}{x^2-2}$ 15) $y = \sqrt{x^2 + 3x - 8}$

16) $y = x\ln x + e^{-x+1}$ 17) $y = \ln^2 x - 2\ln x$ 18) $y = x^2 \ln(1 - 3x)$

19) $y = \dfrac{2e^x}{2x - 3}$ 20) $y = -x + \ln(x^2 + 3x)$ 21) $y = (3 - 4x)\ln(1 - 2x)$

22) $y = \dfrac{xe^x}{x+2}$ 23) $y = \ln^2(x + e^{1-x})$ 24) $y = e^x(x^3 + 2)^2$

B. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione f nel punto a fianco indicato:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ $x = 0$ 2) $f(x) = e^x$ $x = 0$

3) $f(x) = \ln x$ $x = 1$ 4) $f(x) = x^2 + 4x + 5$ $x = -2$

5) $f(x) = e^{-x} + 3x$ $x = 0$ 6) $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2 + x - 1}$ $x = 1$

C. Determinare le coordinate del punto P in modo che la retta tangente al grafico della funzione f in P abbia la caratteristica a fianco segnata:

1) $f(x) = x^2 + x - 2$ sia parallela alle retta $x + y - 12 = 0$

2) $f(x) = \ln(x + 4)$ sia parallela alla retta passante per $A(1;1)$ e $B(2;3)$

3) $f(x) = e^{3x+4}$ sia parallela alla bisettrice del secondo quadrante

D. Determinare per quali valori dei parametri la funzione f è derivabile nel suo dominio:

1) $f(x) = \begin{cases} be^x + 2 & x \geq 0 \\ x^3 + x + a & x < 0 \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x + 5 & x < 0 \\ a\ln(x+1) + 5 & x \geq 0 \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} ae^{x+1} & x\le -1 \\ x^2+b & -1<x<1 \\ 2x+c & x\ge 1 \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} -x^2+b & x\le 1 \\ \ln x+a & x>1 \end{cases}$

E. Determinare in quali punti del suo dominio la funzione non è derivabile e specificare il tipo di punto singolare:

1) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-1}$

2) $f(x)=\left|x^2-4x+3\right|$

3) $f(x)=\left|(x-1)^3\right|$

Soluzioni

A.

1) $y'=6x-6$

2) $y'=e^x+2-\dfrac{1}{x}$

3) $y'=e^x+xe^x$

4) $y'=2x+\dfrac{3}{3x-2}$

5) Si tratta del prodotto di due funzioni composte: $y'=-3e^{7-5x}+(1-3x)e^{7-5x}(-5)=e^{7-5x}(15x-8)$

6) La funzione può essere riscritta nel modo seguente: $y=(6x-2)^{-2}-(5-x)^{-1}$, per cui la derivata, ricordando la regola per la derivata della funzione composta, è data da $y'=\dfrac{-12}{(6x-2)^3}-\dfrac{1}{(5-x)^2}$

7) Possiamo scrivere $y=\ln x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{\sqrt[5]{x^2}}=\ln x+x^{-1}+2x^{-\frac{2}{5}}$, per cui la derivata è

$$y'=\frac{1}{x}-1\cdot x^{-2}+2\left(-\frac{2}{5}\right)x^{-\frac{7}{5}}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{4}{5x\sqrt[5]{x^2}}.$$

8) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt[4]{(2x+1)^3}}+\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}-\dfrac{3}{x^4}$

9) $y'=-e^{-x}+\dfrac{3}{3x+4}$

10) $y'=\dfrac{x-e^{-x}-x\left(1-e^x\right)}{\left(x-e^x\right)^2}=\dfrac{e^x(x-1)}{\left(x-e^x\right)^2}$

11) $y'=(2+2x)e^{2x+x^2}$

12) $y'=\dfrac{-3}{(2x+1)^2}$

13) $y'=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x^2+3}{\left(x^2+2x-3\right)^2}$

14) $y' = \frac{-10x}{\left(x^2-2\right)^2}$

15) $y' = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x-8}}$

16) $y' = \ln x + 1 - e^{-x+1}$

17) $y' = \frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x} = \frac{2(\ln x - 1)}{x}$

18) $y' = 2x\ln(1-3x) - \frac{3x^2}{1-3x}$

19) $y' = \frac{2e^x(2x-5)}{(2x-3)^2}$

20) $y' = -1 + \frac{2x+3}{x^2+3x} = \frac{-x^2-x+3}{x^2+3x}$

21) $y' = -4\ln(1-2x) - \frac{2(3-4x)}{1-2x}$

22) Si tratta di fare la derivata di un quoziente, il cui numeratore è il prodotto di due funzioni. Abbiamo allora $y' = \frac{\left(e^x + xe^x\right)(x+2) - xe^x(1)}{(x+2)^2} = \frac{e^x\left(x^2+2x+2\right)}{(x+2)^2}$

23) Si tratta di una funzione composta, che possiamo decomporre nel modo seguente: $y = t^2$ con $t = \ln s$ con $s = x + e^{1-x}$. Pertanto abbiamo

$$y' = 2\ln\left(x+e^{1-x}\right)\frac{1}{x+e^{1-x}}\left(1+e^{1-x}(-1)\right) = \frac{2\left(1-e^{1-x}\right)\ln\left(x+e^{1-x}\right)}{x+e^{1-x}}$$

24) $y' = e^x\left(x^3+2\right)^2 + e^x \cdot 2\left(x^3+2\right)\cdot 3x^2 = e^x\left(x^3+2\right)\left(x^3+6x^2+2\right)$

B.

L'equazione della retta tangente al grafico di una funzione in un suo punto di ascissa x_0 è $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

1) $f' = -\frac{1}{(x+1)^2}$, da cui $f(0) = 1$ e $f'(0) = -1$, quindi l'equazione della retta è $y - 1 = -1\cdot(x-0)$, cioè $y = -x+1$

2) $y = x+1$

3) $y = x-1$

4) $y = 1$ (il punto dato è l'ascissa del vertice della parabola, per cui la tangente è parallela all'asse delle ascisse)

5) $y = 2x+1$

6) $y = -14x+19$

C.

1) Poiché la retta tangente deve essere parallela alla retta assegnata, la retta tangente deve avere lo stesso coefficiente angolare della retta data, che è $m = -1$. Occorre pertanto cercare il punto della curva nel quale la derivata, che è la pendenza, cioè il coefficiente angolare della retta tangente, sia uguale a -1. Si ha $y' = 2x+1$, quindi deve essere $2x+1=-1$, da cui otteniamo $x=-1$. Il punto è pertanto $P(-1,-2)$.

2) Il problema può essere formulato anche nel modo seguente: "Determinare il punto del grafico in cui la pendenza della curva è uguale alla pendenza della retta passante per i punti A e B".
Dobbiamo innanzi tutto trovare la pendenza della retta. Abbiamo $m = \frac{3-1}{2-1} = 2$. Dobbiamo ora cercare il punto della funzione in cui la derivata è uguale a 2. La derivata è $f'(x) = \frac{1}{x+4}$ e ponendo $\frac{1}{x+4} = 2$, si ottiene $x = -\frac{7}{2}$. Il punto cercato è $P\left(-\frac{7}{2}, -\ln 2\right)$.

3) L'esercizio è analogo al precedente 1). La bisettrice del secondo quadrante ha coefficiente angolare $m=-1$ e la derivata della funzione è $f'(x) = 3e^{3x+4}$. Dovrà perciò essere $3e^{3x+4} = -1$, equazione che non ammette soluzione, dato che la funzione esponenziale è ovunque positiva. Pertanto non esiste il punto cercato.

D.

La funzione, per essere derivabile, deve innanzi tutto essere continua. L'unico punto in cui occorre verificare la continuità e la derivabilità è il punto di giuntura. Devono essere verificate, in sostanza, nel punto di giuntura x_0, le due uguaglianze $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0^-} f'(x) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$.

1) Abbiamo $f(x) = \begin{cases} be^x + 2 & x \geq 0 \\ x^3 + x + a & x < 0 \end{cases}$ e $f'(x) = \begin{cases} be^x & x > 0 \\ 3x^2 + 1 & x < 0 \end{cases}$, pertanto deve essere verificato il sistema $\begin{cases} b+2 = a \\ b = 1 \end{cases}$, da cui la soluzione $a=3$ e $b=1$

2) La funzione è continua per qualsiasi valore del parametro a, perché $\lim_{x\to 0^-} \left(-x^2 - 4x + 5\right) = f(0) = 5$. Occorre allora verificare solo la condizione sulla derivata: si ottiene $a=-4$

3) Si ha $f'(x)=\begin{cases} ae^{x+1} & x<-1 \\ 2x & -1<x<1 \\ 2 & x>1 \end{cases}$. Occorre verificare la continuità e la derivabilità nei due punti $x=-1$ e $x=1$. Si ottiene $\begin{cases} a=b+1 \\ b+1=c+2 \\ a=-2 \\ 2=2 \end{cases}$, da cui $a=-2,\ b=-3$ e $c=-4$.

4) Per la continuità abbiamo $-1+b=a$, ma la condizione sulla derivabilità risulta essere $-2=1$, uguaglianza evidentemente falsa, pertanto la funzione non è derivabile in $x=1$ per alcun valore dei parametri.

E.

1) La funzione data è definita e continua per ogni valore reale. La derivata della funzione è $f'(x)=\frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}}$, che non esiste per $x=1$. Tale punto è pertanto un possibile punto singolare e per determinarne la natura occorre calcolare i due limiti $\lim_{x\to1^-} f'(x)$ e $\lim_{x\to1^+} f'(x)$. Si ha $\lim_{x\to1^-}\frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}}=+\infty$ e $\lim_{x\to1^+}\frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}}=+\infty$ e pertanto $x=0$ è un flesso a tangente verticale.

2) La funzione data è continua e può essere scritta come una funzione definita a pezzi $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & x<1 \vee x>3 \\ -x^2+4x-3 & 1\le x\le 3 \end{cases}$ e gli eventuali punti singolari sono $x=1$ e $x=3$. La derivata della funzione risulta essere $f'(x)=\begin{cases} 2x-4 & x<1 \vee x>3 \\ -2x+4 & 1<x<3 \end{cases}$ e calcolando i due limiti abbiamo $\lim_{x\to1^-}(2x-4)=-2$ e $\lim_{x\to1^+}(-2x+4)=2$, quindi il punto $x=1$ è un punto angoloso. In modo analogo si deduce che anche il punto $x=3$ è un punto angoloso.

3) Si procede come per il caso precedente. Questa volta, però, calcolando i due limiti destro e sinistro della derivata nel punto $x=1$, si trova che i due limiti sono entrambi uguali a 0 e pertanto la funzione data è derivabile in tutti i punti del suo dominio.