LIMITI

Confronto di infiniti. Il simbolo " $\sim$ "

In generale, per uscire da una forma di indecisione $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ o $(\infty-\infty)$, è necessaria un'analisi della ″velocità″ con cui le funzioni (o le successioni) divergono.

Supponiamo che f e g siano due funzioni infinite per $x \to \pm\infty$ (o per $x \to c$) e consideriamo il limite di $\frac{f}{g}$, si hanno quattro possibilità:

(a) se $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, f è *infinito di ordine superiore a g* e si dice anche che ″g è trascurabile rispetto a f per $x \to \infty$;

(b) se $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, f è *infinito di ordine inferiore a g* e si dice anche che ″f è trascurabile rispetto a g per $x \to \infty$;

(c) se $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$, f è *dello stesso ordine di g per* $x \to \infty$. In particolare, se l = 1, le due funzioni si dicono **asintotiche** per $x \to \infty$ e si scrive:

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \to \infty,$$

che si legge "f è *asintotica a g* per $x \to \infty$".

(d) se $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ non esiste, f e g *non sono confrontabili*.

Le stesse definizioni valgono per due successioni a_n e b_n infinite (per $n \to +\infty$).

Esempi

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$: per $x \to +\infty$ x è infinito di ordine superiore a $\sqrt[3]{x}$.

In generale se $\alpha > \beta > 0$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-\beta} = +\infty,$$

di conseguenza tra le potenze di x, infinite per $x \to +\infty$, sono trascurabili quelle con esponente minore.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$: la successione 2^n è infinito di ordine inferiore a 3^n.

In generale se $a > b > 1$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{a^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^n = 0,$$

di conseguenza tra le successioni geometriche infinite (o le funzioni esponenziali infinite), sono trascurabili quelle con base minore.

3. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log x^3}{\log\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{3\log x}{(1/2)\log x} = 6$: per $x \to +\infty$ $\log x^3$ è infinito dello stesso ordine di $\log\sqrt{x}$.

In questi esempi abbiamo "ordinato" le potenze x^α con $\alpha > 0$ e $x \to +\infty$, in base all'esponente; abbiamo ordinato le funzioni esponenziali a^x con $a > 1$ e $x \to +\infty$, a seconda della base.
Ora è possibile confrontare tra di loro le tre famiglie di funzioni: esponenziali, potenze e logaritmi. Vale, infatti, il seguente risultato che stabilisce una *gerarchia di infiniti*.

Teorema *Ogni infinito esponenziale è d'ordine superiore a ogni infinito potenza*; *ogni infinito potenza è d'ordine superiore a ogni infinito logaritmico*. *Ossia per ogni* $a > 1$, $\alpha > 0$, $k > 0$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{(\log x)^k} = +\infty .}$$

Esempi

4. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^{100}} = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\log^5 x} = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^3}{2^n} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\log^2 n} = +\infty$.

Consideriamo ora il caso in cui sia $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, cioè $f(x) \sim g(x)$ per $x \to \infty$; il simbolo asintotico è particolarmente utile nel calcolo dei limiti.
La relazione " $\sim$ " di *asintotico* esprime un'*equivalenza* di comportamento di fronte all'operazione di limite, ne consegue che nel calcolo del limite di una funzione (o successione) è possibile sostituire la funzione stessa con un'altra ad essa asintotica, ma più semplice, in modo da facilitare il calcolo.

Esempi

5. Per $x \to \pm\infty$ ogni polinomio nella variabile x è asintotico al termine di grado massimo:

per $x \to \pm\infty$ $3x^4 - 10x^3 + 6 \sim 3x^4$, quindi $\lim_{x\to\pm\infty} \left(3x^4 - 10x^3 + 6\right) = \lim_{x\to\pm\infty} 3x^4 = +\infty$.

6. Ogni espressione data dalla somma di infiniti è asintotica all'infinito di ordine superiore:

per $x \to +\infty$ $3x^4 - e^x + 6\log x \sim -e^x$, quindi $\lim_{x\to+\infty} \left(3x^4 - e^x + 6\log x\right) = \lim_{x\to+\infty} (-e^x) = -\infty$;

per $x \to -\infty$ $3x^4 - e^x + \sqrt[3]{x} \sim 3x^4$, quindi $\lim_{x\to-\infty} \left(3x^4 - e^x + \sqrt[3]{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} 3x^4 = +\infty$.

Si osservi che in questo ultimo esempio $e^x \to 0$ per $x \to -\infty$ e quindi è trascurabile rispetto a tutti gli infiniti.

7. Nel calcolo del limite di un quoziente di due infiniti è possibile sostituire sia la funzione a numeratore che quella a denominatore rispettivamente con due altre funzioni ad esse asintotiche, ma più semplici. Infatti se per $x \to \infty$ $f(x) \sim f_1(x)$ e $g(x) \sim g_1(x)$, allora

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}\,.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-e^x}{x^3+\log x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-e^x}{x^3}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-e^x}{x^3+20}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^3}=2 \quad ,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3-2n^2+100}{3n^4+\log n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{3n^4}=0\,.$$

Osservazione
Non è lecito in un prodotto trascurare dei fattori anche se di ordine inferiore, cioè

per $x\to+\infty$ $\sqrt{x}\cdot e^x$ **non** è asintotico a e^x.