Dovete decidere se comperare o meno un equipaggiamento per il pompaggio dell'acqua. Infatti, se il tempo sarà caldo e secco, e non avete acquistato il materiale, avrete una perdita $-G$. Se il tempo è piovoso, invece, avrete un guadagno G. Se comperate il macchinario dovrete sostenere un costo pari a C. Se comperate il macchinario e il tempo è secco, evitate la perdita -G e ottenete un guadagno $\frac{2}{3}G - C$. Se il tempo è bello, avete comperato il macchinario, ma ugualmente avete un guadagno G. La vostra decisione è basata sulle previsioni del tempo per la prossima primavera/estate. Sia θ la probabilità che il tempo sia secco.

- Disegnate il diagramma di influenza per questo problema
- Derivate il corrispondente albero delle decisioni
- Supponete:
  $G = 300$
  $C = 30$
  $\theta = 0.5$
  Cosa decidete?
- Supponete ora di avere una funzione di avversione al rischio data da:

$$r(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \qquad \#$$

con $u(0) = 0$ e $u(\infty) = 1$

Cosa decidete ora?

Sol.

$\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = -\frac{d}{dx}\ln(u'(x))$

$\int\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)dx = -\frac{1}{x} - 2\ln x$

$\int -\frac{d}{dx}\ln(u'(x))dx = \ln(u'(x))$

$-\frac{1}{x} - 2\ln x = \ln(u'(x))$

$e^{-\frac{1}{x}-2\ln x} = u'(x);$

$e^{-\frac{1}{x}-2\ln x} = e^{-\frac{1}{x}}\,e^{-2\ln x} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$

$\int\left(\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}\right)dx = e^{-\frac{1}{x}}$

Quindi

$u(x) = ae^{-\frac{1}{x}} + b;$

Le condizioni al contorno ci portano a:

$u(0) = 0 \rightarrow b = 0$

$u(\infty) = 1 \rightarrow a = 1$

Quindi la funzione utilità è:

$u(x) = e^{-\frac{1}{x}};$

2) State considerando un insieme di 10 componenti identici con tasso di guasto λ non noto. Avete a disposizione i seguenti dati sulle rotture dei componenti (in anni):

$t_1 = 1$

$t_2 = 1.5$

$t_3 = 2$

$t_4 = 2.5$

$t_5 = 3$

$t_6 = 3.5$

$t_7 = 4$

$t_8 = 4.5$
$t_9 = 5$
$t_{10} = 5.5$

- Qual è la distribuzione epistemica del tasso di guasto, se si parte da una distribuzione uniforme

$$u(\lambda) = \begin{cases} 1/20 & if \quad 0 < \lambda < 20 \\ 0 & altrimenti \end{cases} \quad \#$$

come distribuzione a priori?
La funzione di verosimiglianza è:
$L(\lambda|t_1,\ldots,t_{10}) = \lambda \cdot e^{-\lambda t_1} \cdot dt_1 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t_2} \cdot dt_2 \cdot \ldots \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t_{10}} \cdot dt_{10}$
Da cui, per il teorema di Bayes:

$$\pi_1(\lambda) = \frac{\lambda^{10} e^{-\lambda \cdot T} u(\lambda)}{\int \lambda^{10} e^{-\lambda(t_1+t_2+\ldots+t_{10})u(\lambda)} u(\lambda) d\lambda} \quad \#$$

dove $T = \sum_{i=1}^{10} t_i$
Quindi: $T = 32.5$

- Qual è il valor medio del tasso di guasto?

Il valor medio si trova da:
$E[\lambda] = \int \lambda \pi_1(\lambda) d\lambda = \frac{\int \lambda^{11} \cdot e^{-\lambda \cdot T} d\lambda}{\int \lambda^{10} \cdot e^{-\lambda \cdot T} d\lambda} = .338\,461\,538\,5$

Considerate un sistema composto da 4 componenti con logica 3/4 (ovvero 3 componenti devono funzionare affinchè il sistema funzioni).

- Individuate i Minimal cut sets e scrivete la funzione di struttura per la rottura del sistema fermandosi ai milimal cut sets
  Sol.
  Dalla logica del sistema i minimal cut sets risultano:
  $M_1 = X_1 X_2$;
  $M_2 = X_1 X_3$;
  $M_3 = X_1 X_4$;
  $M_4 = X_2 X_3$;
  $M_5 = X_2 X_4$;
  $M_6 = X_3 X_4$;
  $X_T = X_1X_2 + X_1X_3 + X_1X_4 + X_2X_3 + X_2X_4 + X_3X_4$
- Utilizzare l'aprossimazione degli eventi rari e la regola aurea per esprimere la probabilità di rottura del sistema
  $P(T) = P(X_1X_2) + P(X_1X_3) + P(X_1X_4) + P(X_2X_3) + P(X_2X_4) + P(X_3X_4)$.
- Calcolate l'inaffidabilità del sistema al tempo t supponendo indipendenti le rotture dei componenti.
  $F(T) = F_1(T)F_2(T) + F_1(T)F_3(T) + F_1(T)F_4(T) + F_2(T)F_3(T) + F_2(T)F_4(T) + F_3(T)F_4(T)$
- Scrivere l'espressione dell'affidabilità quando i tempi di rottura dei componenti sono caratterizzati da distribuzioni esponenziali, con tassi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.
  $F_1(T) = 1 - e^{-\lambda_1 T}$

$F_2(T) = 1 - e^{-\lambda_2 T}$
$F_3(T) = 1 - e^{-\lambda_3 T}$
$F_4(T) = 1 - e^{-\lambda_4 T}$
$F(T) \simeq (1 - e^{-\lambda_1 T})(1 - e^{-\lambda_2 T}) + (1 - e^{-\lambda_1 T})(1 - e^{-\lambda_3 T}) + (1 - e^{-\lambda_1 T})(1 - e^{-\lambda_4 T}) + (1 - e^{-\lambda_2 T})($

- Supponete che il sistema sia soggetto a manutenzione periodica di intervallo τ e durata τ_r, con $\tau_r << \tau$. Scrivete l'espressione della sua indisponibilità media in funzione di τ. (Utilizzate l'approssimazione di Taylor: $1 - e^{-\lambda t} = \lambda t$).
$F_1(T) = 1 - e^{-\lambda_1 T} \simeq \lambda_1 T$
$F_2(T) = 1 - e^{-\lambda_2 T} \simeq \lambda_2 T$
$F_3(T) = 1 - e^{-\lambda_3 T} \simeq \lambda_3 T$
$F_4(T) = 1 - e^{-\lambda_4 T} \simeq \lambda_4 T$
$F(T) \simeq \lambda_1 T \lambda_2 T + \lambda_1 T \lambda_3 T + \lambda_1 T \lambda_4 T + \lambda_2 T \lambda_3 T + \lambda_2 T \lambda_4 T + \lambda_3 T \lambda_4 T = (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 +$
L'indisonbilità istantanea è:
$F(T) \simeq \lambda_1 T \lambda_2 T + \lambda_1 T \lambda_3 T + \lambda_1 T \lambda_4 T + \lambda_2 T \lambda_3 T + \lambda_2 T \lambda_4 T + \lambda_3 T \lambda_4 T = (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 +$
$$q(T) = \begin{cases} F(T) & se \quad 0 < T < \tau \\ 1 & se \quad \tau < T < \tau_r \end{cases}$$
L'indisponibilità media del sistema, perciò risulta:
$$\overline{q}(\tau) = \frac{\int_0^{\tau+\tau_r} q(t)dt}{\tau+\tau_r} = \frac{\int_0^{\tau} F(t)dt}{\tau+\tau_r} + \frac{\int_{\tau}^{\tau+\tau_r} 1dt}{\tau+\tau_r} \simeq \frac{\int_0^{\tau}(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_4+\lambda_2\lambda_3+\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_4)t^2dt}{\tau} + \frac{\tau_r}{\tau} =$$
$$\frac{\frac{1}{3}\tau^3\lambda_1\lambda_2+\frac{1}{3}\tau^3\lambda_1\lambda_3+\frac{1}{3}\tau^3\lambda_1\lambda_4+\frac{1}{3}\tau^3\lambda_2\lambda_3+\frac{1}{3}\tau^3\lambda_2\lambda_4+\frac{1}{3}\tau^3\lambda_3\lambda_4}{\tau} + \frac{\tau_r}{\tau} = \frac{1}{3}\tau^2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda$$
$q(\tau, \alpha, \tau_r) = \frac{1}{3}\tau^2\alpha + \frac{\tau_r}{\tau}$

- Esprimete il tempo di manutenzione ottimale in funzione di $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4. e\ \tau_r$.
L'intervallo ottimale di manutenzione si ottiene da:
$\frac{d}{d\tau}\overline{q}(\tau) = 0$
Abbiamo:
$\frac{d}{d\tau}\frac{1}{3}\tau^2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4) + \frac{d}{d\tau}\frac{\tau_r}{\tau} = \frac{2}{3}\tau(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2$
Poniamo per semplicità $\alpha = (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4)$. Ne segue:
$\frac{2}{3}\tau\alpha - \frac{\tau_r}{\tau^2} = \frac{2\tau^3\alpha - 3\tau_r}{3\tau^2}$
Ponendo l'uguaglianza a zero:
$\frac{2\tau^3\alpha - 3\tau_r}{3\tau^2} = 0 \to \tau^3 = \frac{3\tau_r}{2\alpha} \to \tau^* = \sqrt[3]{\frac{3\tau_r}{2\alpha}} = 1.2718078 \times 10^4$

- Se i tassi di guasto valgono:
$\lambda_1 = 10^{-6}$
$\lambda_2 = 2 \cdot 10^{-6}$
$\lambda_3 = 3 \cdot 10^{-6}$
$\lambda_4 = 4 \cdot 10^{-6}$
con
$\tau_r = 48\ h$
e il sistema producesse 4 milioni di unità al periodo se funzionasse a tempo pieno, quante unità per periodo produrreste in media in meno per via della indisponibilità?
L'intervallo ottimale di manutenzione risulta:
$\tau^* = \sqrt[3]{\frac{3\tau_r}{2\alpha}} = 1.2718078 \times 10^4$
$\tau = 1.2718078 \times 10^4$
$q(\tau^*, \alpha, \tau_r) = \frac{1}{3}\tau^2\alpha + \frac{\tau_r}{\tau} = 5.661232776 \times 10^{-3}$
$P_{less} = q(\tau^*, \alpha, \tau_r) \cdot 4000000 = 5.661232776 \times 10^{-3} \cdot 4000000 = 2.26449311 \times 10^4$