F86033 - Matematica per l'Economia e la Finanza II a.a. 2007/08

Cognome____________________ **Nome**____________________ **Voto**

Appello regolare Sessione estiva
10 lug. 2008
(Matematica Finanziaria)

Istruzioni: Le risposte devono essere scritte unicamente su questi fogli. Compilare la facciata con i propri dati.

1. Una obbligazione è disponibile sul mercato al prezzo di € $98,50$, per un valore nominale di € $100,00$, con scadenza tra due anni e rimborso alla pari. La cedola è corrisposta annualmente con un tasso $j = 3\%$.

a.(3punti) Calcolare la cedola e scrivere l'equazione che determina il tasso interno di rendimento dell'operazione.

b.(3punti) Calcolare il tasso interno dell'operazione.

c.(2punti) Nell'ipotesi che, dopo l'acquisto, si rilevi una struttura per scadenze piatta con $i = 4\%$, calcolare la duration del titolo.

2. Un prestito di € $12.000,00$ è concesso per 3 anni al tasso annuo effettivo $i = 5,20\%$. L'ammortamento è corrisposto con rate annue posticipate.

a.(3punti) Calcolare la prima rata nell'ipotesi di un ammortamento all'Italiana.

b.(2punti) Calcolare la rata nell'ipotesi di un ammortamento alla Francese.

c.(1punti) Calcolare il debito residuo dopo il pagamento della seconda rata nell'ammortamento alla Francese.

d.(2punti) Sempre nel caso di ammortamento Francese, supponendo che il tasso contrattuale sia aumentato di $0,5$ punti percentuali ($i' = 5,70\%$) dopo il pagamento della seconda rata, si calcoli l'ammontare dell'ultimo versamento.

3. Dati i vettori

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -9 \end{bmatrix}$$

a.(3punti) Determinare quanti tra essi sono linearmente indipendenti.

b.(2punti) Calcolare la distanza tra i vettori $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_3$.

c.(3punti) Verificare se $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ è la matrice inversa di $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

4. Un'azienda deve scegliere quante inserzioni pubblicitarie x_1 e x_2 acquistare in due diverse riviste (denominate 1 e 2). Ogni inserzione costa, rispettivamente, $p_1 = 2$ e $p_2 = 3$. Il Budget a disposizione per l'iniziativa è pari a 7 ed il ritorno della pubblicità è stimato dalla funzione obiettivo

$$F(x_1, x_2) = 5x_1 + 7x_2 + 3x_1x_2$$

a.(2punti) Scrivere il problema di massimizzazione vincolata che deve affrontare l'azienda e la corrispondente funzione Lagrangiana.

b.(3punti) Determinare i valori di λ, x_1, x_2 che determinano punti stazionari della funzione Lagrangiana.

c.(3punti) Attraverso la matrice $\nabla^2\mathcal{L}(\lambda, x_1, x_2)$ determinare l'eventuale soluzione del problema.

Soluzioni F86033 - Mat. Econ. e Fin. II (10.07.08)

1. (a) La cedola è pari a

$$c = 100 \times 0,03 = 3,00€$$

da cui si ricavano i flussi di cassa

t	0	1	2
€	$-97,95$	$+3,50$	$+107,50$

L'equazione richiesta è dunque

$$-98,50 + \frac{3}{1+x} + \frac{103}{(1+x)^2} = 0$$

(b) Il tasso interno dell'operazione è la soluzione (maggiore di -1) dell'equazione precedente, ovvero $x^* = 3,793\%$ circa.

(c) La Duration del titolo, nelle ipotesi fatte, è

$$D = \frac{1 \times 3 \times (1,04)^{-1} + 2 \times 103 \times (1,04)^{-2}}{3 \times (1,04)^{-1} + 103 \times (1,04)^{-2}} = 1,97$$

2. (a) Poiché la quota di capitale è

$$C = \frac{12000}{3} = 4.000,00€$$

e la quota di interesse

$$I = 12000 \times 0,052 = 624,00€$$

La rata risulta essere

$$R_1 = 4.624,00€$$

(b) Nel caso di ammortamento alla Francese, si può ricorrere alla formula

$$R = 12000 \times \frac{5,20\%}{1-(1,052)^{-3}} = € \ 4.423,03$$

(c) La successione dei debiti residui risulta essere

$$\begin{aligned} D_0 &= € \ 12.000 \\ D_1 &= 12000 \times (1,052) - 4.423,03 = € \ 8.200,97 \\ D_2 &= 8200,97 \times (1,052) - 4.423,03 = € \ 4.204,40. \end{aligned}$$

(d) Dopo il pagamento della seconda rata risulta un debito pari ad € 4.204,40. Pertanto la successiva (ed ultima) rata, dovrà essere il montante, al nuovo tasso di interesse i' del debito residuo.

$$R = 4.204,40\,(1 + 5,70\%) = € \ 4.444,05.$$

3. (a) Il numero di vettori linearmente indipendenti è pari al rango della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}$$

che risulta essere compreso tra 2 e 3, essendo non singolare la sottomatrice $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ Si possono considerare le orlate di tale matrice

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & -9 \end{bmatrix}$$
$$\det \mathbf{C}_1 = 3 \qquad \det \mathbf{C}_2 = -6$$

dalle quali si evince che il rango è 3 e quindi 3 sono i vettori linearmente indipendenti.

(b) Ricordando la definizione di distanza, si ottiene

$$d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3\| = \left\| \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{14}$$

(c) La matrice $\mathbf{A}$ è invertibile se e solo se non è singolare, ovvero quando

$$0 \neq \det \mathbf{A} = -2$$

quindi la matrice è invertibile. La matrice inversa di $\mathbf{A}$ deve soddisfare la relazione $\mathbf{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{I}$. Si calcolano quindi i due prodotti, ottenendo il risultato desiderato.

4. (a) Il problema vincolato è

$$\begin{aligned} &\max 5x_1 + 7x_2 + 3x_1x_2 \\ &\text{s.t. } 2x_1 + 3x_2 = 7 \end{aligned}$$

la cui funzione Lagrangiana è

$$\mathcal{L}(\lambda, x_1, x_2) = 5x_1 + 7x_2 + 3x_1x_2 + \lambda(7 - 2x_1 - 3x_2)$$

(b) I punti stazionari della funzione Lagrangiana risolvono il sistema

$$\begin{cases} 7 - 3x_2 - 2x_1 = 0 \\ 3x_2 - 2\lambda + 5 = 0 \\ 3x_1 - 3\lambda + 7 = 0 \end{cases}$$

La cui unica soluzione è la terna $\left[\lambda = \frac{25}{6}, x_1 = \frac{11}{6}, x_2 = \frac{10}{9}\right]$.

(c) La matrice Hessiana risulta

$$\nabla^2 \mathcal{L}(\lambda, x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

costante per ogni scelta di (λ, x_1, x_2). Poiché $H_3 = \det \nabla^2 \mathcal{L}\left(\frac{25}{6}, \frac{11}{6}, \frac{10}{9}\right) = 36 > 0$, il punto è di massimo relativo vincolato.