Esercizio 1 Considerate i tre rendimenti indipendenti X_1, X_2 e X_3 dei titoli azionari A_1, A_2 e A_3, aventi valori attesi e volatilità pari a: μ_1=10%, μ_2=20%, μ_3=5%, σ_1=20%, σ_2=40%, σ_3=10%. Considerate inoltre due portafogli (P_1 e P_2) composti da tali titoli nel seguente modo: P_1 è investito per il 20% in A_1, il 50% in A_2 e il 30% in A_3; P_2 è investito per il 70% in A_1 e il 30% in A_3.

1. Dopo aver indicato la formula dei rendimenti R_1 e R_2 di ciascuno dei due portafogli P_1 e P_2, si calcolino i rendimenti attesi dei due portafogli.
2. Quale dei due portafogli è più rischioso?
3. Ipotizzando che i rendimenti dei titoli siano variabili aleatorie normali, calcolate la probabilità che i rendimenti dei due portafogli siano ciascuno superiore al 10%.

Esercizio 2 Considerate un portafoglio azionario composto da due titoli i cui rendimenti X e Y siano variabili casuali normali. I pesi dei due titoli nel portafoglio sono rispettivamente 0.4 e 0.6. Sapete inoltre che σ_X=30% e σ_Y=10%.

1. Dopo aver indicato la formula del rendimento R del portafoglio, calcolate la varianza del rendimento R del portafoglio sotto l'ipotesi di indipendenza dei rendimenti dei titoli che lo compongono.
2. Inoltre si calcoli la varianza del rendimento R del portafoglio supponendo che $\rho_{X,Y} = -0.7$.
3. Si confrontino e commentino i risultati di cui ai due punti precedenti (il portafoglio è più o meno rischioso senza l'ipotesi di indipendenza? Perché?)

Es. 1. Domanda 1: $\boxed{R_1} = 0.2X_1 + 0.5X_2 + 0.3X_3$, $\boxed{R_2} = 0.7X_1 + 0.3X_3$

$$\boxed{E(R_1)} = 0.2E(X_1) + 0.5E(X_2) + 0.3E(X_3) =$$

$$= 0.2\times 0.1 + 0.5\times 0.2 + 0.3\times 0.05 = 0.02 + 0.1 + 0.015 = \boxed{0.135}$$

$$\boxed{E(R_2)} = 0.7E(X_1) + 0.3E(X_3) = 0.7\times 0.1 + 0.3\times 0.05 = 0.07 + 0.015 = \boxed{0.085}$$

Es. 1. Domanda 2: Dal confronto delle varianze calcolate qui sotto risulta che è più rischioso il portafoglio P_1

$$\boxed{V(R_1)} = 0.2^2\sigma_1^2 + 0.5^2\sigma_2^2 + 0.3^2\sigma_3^2 =$$

$$= 0.04\times 0.04 + 0.25\times 0.16 + 0.09\times 0.01 = 0.0016 + 0.04 + 0.0009 = \boxed{0.0425}$$

$$\boxed{V(R_2)} = 0.7^2\times\sigma_1^2 + 0.3^2\sigma_3^2 = 0.49\times 0.04 + 0.09\times 0.01 = 0.0196 + 0.0009 = \boxed{0.0205} < V(R_1) = 0.0425$$

Es. 1. Domanda 3: $X_1 \sim N(0.1;0.2^2), X_2 \sim N(0.2;0.4^2), X_3 \sim N(0.05;0.1^2)$

$$\Rightarrow R_1 \sim N(0.135;0.0425), R_2 \sim N(0.015;0.0205)$$

$$P(R_1 > 0.1) = P\left(N(0;1) > \frac{0.1-0.135}{\sqrt{0.0425}}\right) = P\left(N(0;1) > \frac{-0.035}{0.2062} = -0.1697\right) =$$

$$= P\left(N(0;1) < \frac{-0.035}{0.2062} = 0.1697\right) = 0.5675$$

$$P(R_2 > 0.1) = P\left(N(0;1) > \frac{0.1-0.085}{\sqrt{0.0205}}\right) = 1 - P\left(N(0;1) < \frac{0.015}{0.1432} = 0.1047\right) = 1 - 0.5398 = 0.4602$$

Es. 2. Domanda 1: $\boxed{R} = 0.4X + 0.6Y$

$$\boxed{V(R)} = 0.4^2\times\sigma_X^2 + 0.6^2\sigma_Y^2 = 0.16\times 0.09 + 0.36\times 0.01 = 0.0144 + 0.0036 = \boxed{0.0180}$$

Es. 2. Domanda 2: $\boxed{R} = 0.4X + 0.6Y$, $\boxed{Cov(X,Y) = \sigma_X\sigma_Y\rho(X,Y)}$

$$\rho(X,Y) = -0.7 \Rightarrow Cov(X,Y) = 0.3\times 0.1\times(-0.7) = -0.021$$

$$\boxed{V(R)} = 0.4^2\times\sigma_X^2 + 0.6^2\sigma_Y^2 + 2(0.4\times 0.6)Cov(X,Y) = 0.4^2\times\sigma_X^2 + 0.6^2\sigma_Y^2 + 2(0.4\times 0.6)\times(-0.021) =$$

$$= 0.0180 + 0.48\times(-0.021) = 0.0180 - 0.01008 = \boxed{0.00792}$$

Es. 2. Domanda 3: $\boxed{R} = 0.4X + 0.6Y$

X e Y stocasticamente indipendenti $\Rightarrow \rho(X,Y) = Cov(X,Y) = 0 \Rightarrow V(R) = 0.0180$

X e Y correlati negativamente $\Rightarrow \rho(X,Y) = -0.7, Cov(X,Y) = -0.021 \Rightarrow V(R) = 0.00792 < 0.0180$

La correlazione negativa (o inversa) tra i rendimenti dei due titoli permette di ridurre la rischiosità complessiva del portafoglio all'interno del quale le variazioni in aumento del rendimento X compensano in una certa misura le variazioni in diminuzione del rendimento Y e viceversa.