Corso di STATISTICA, A.A. 2007-2008

Esercizi svolti per la preparazione della 2° prova parziale

Come già comunicato con precedente avviso, gli esercizi svolti per la preparazione della 2° prova parziale sono, oltre a quelli svolti in aula durante il corso, quelli scaricabili dal sito dell'università andando su:
(1) "visione vecchi anni accademici",
(2) corso: Statistica 2,
(3) "materiale didattico".

Qui sotto si riproduce a titolo di esempio parte dell'elenco degli esercizi (con soluzioni) che sono scaricabili dal sito dell'università come sopra indicato (e come già in precedenza indicato, *mutatis mutandis*, anche per la 1° prova parziale).

Nell'elenco che segue sono aggiunte alcune note, ovvero alcune
_ **avvertenze**, ed alcune
_ **domande aggiuntive,** ed alcuni
_ *errata corrige* di talune soluzioni.

OLTRE AI TEMI D'ESAME IN DATA ANTERIORE, considerare per la preparazione della 2° prova parziale i seguenti:
_ **soluzioni statistica 2 giugno 2005.doc** (in realtà: 21 giugno 2005)

_ **ES. 4:** *avvertenza*: questo caso di test non è più in programma. Sono rimasti in programma **solo** i test bilaterali. Pertanto sostituirlo con il seguente test bilaterale:

Ad un imprenditore viene proposto l'acquisto di un esercizio commerciale. L'imprenditore sa che l'acquisto è conveniente se il ricavo medio giornaliero è uguale a 300 €. Per decidere se procedere o no all'acquisto, rileva i ricavi degli ultimi 100 giorni di un esercizio commerciale similare, ottenendo un ricavo totale nei 100 giorni pari a 32000 € ed una varianza campionaria corretta dei 100 ricavi giornalieri pari a 10000.

a) Si scrivano ipotesi nulla ed alternativa per il problema in esame, precisando il significato delle quantità considerate. **(2 punti)**

(a) Indico con μ_X il ricavo giornaliero medio atteso della popolazione statistica X = "ricavo giornaliero" e pongo $\mu_0 = 300$. Allora il test è il seguente:

$$H_0 : \mu_X = \mu_0 \text{ contro } H_1 : \mu_X \neq \mu_0 \text{, ovvero: } H_0 : \mu_X = 300 \text{ contro } H_1 : \mu_X \neq 300$$

b) Si scriva la regione di accettazione del test di cui sopra al livello di significatività 0.05 con la popolazione statistica X = "ricavo giornaliero" gaussiana. **(2 punti)**

_ la varianza σ_X^2 della popolazione X non è nota e la sua stima puntuale è $\hat{\sigma}_X^2 = 100$

_ $\alpha = 0.05 \Rightarrow \alpha/2 = 0.025 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0.975$ ed inoltre $n-1=99$ che non c'è sulla della T di student. Poiché 99>30 si utilizza allora la tavola della gaussiana standardizzata e si pone

$t_{0.975}^{99} = z_{0.975} = 1.96$

$$A_{0.05} = \left\{ \bar{x}_n : 300 - 1.96\sqrt{\frac{10000}{100}} < \bar{x}_n < 300 + 1.96\sqrt{\frac{10000}{100}} \right\} = \left\{ \bar{x}_{100} : 300 - 19.6 < \bar{x}_{100} < 300 + 19.6 \right\} =$$

$$= \left\{ \bar{x}_{100} : 280.4 < \bar{x}_{100} < 319.6 \right\}$$

c) Si decida se rifiutare oppure no l'ipotesi nulla, sulla base della realizzazione campionaria descritta al punto a), utilizzando il test considerato al punto b). **(2 punti)**

$\bar{x}_{100} = 32000/100 = 320 \notin A_{0.05} \Rightarrow$ il test rifiuta l'ipotesi nulla $H_0 : \mu_X = 300$ al livello di significatività $\alpha = 0.05$

_ Tema d'esame e soluzioni esame dell'11.1.06

ES. 4: *avvertenza*: questo caso di test non è più in programma. Sono rimasti in programma **solo** i test bilaterali. Pertanto sostituirlo con il seguente test bilaterale: $H_0 : p = 0.75$ contro $H_1 : p \neq 0.75$. La soluzione è analoga, mutatis mutandis, alla soluzione di ES. 3(a) 26.01.06 riportata qui sotto.

_ Tema d'esame e soluzioni esame del 26.1.06

ES. 1(b) *Errata corrige*: invece di "$0.2+0.3=0.5$" si legga "$0.2+0.1=0.3$

ES. 1(b) **Domanda aggiuntiva**: determinare la funzione di probabilità congiunta $p_{X,Y}(x,y)$ del vettore aleatorio bidimensionale (X,Y). **Risposta**:

$$p_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} 0.20 & (x,y)=(0,-1) \\ 0.32 & (x,y)=(0,1) \\ 0.10 & (x,y)=(1,-1) \\ 0.25 & (x,y)=(1,0) \\ 0.13 & (x,y)=(10,1) \\ 0 & altrove \end{cases}$$

ES. 1(b) **Domanda aggiuntiva**: determinare le funzioni di probabilità $p_X(x)$ e $p_Y(y)$ delle variabili aleatorie (marginali) X e Y nonché i loro valori attesi, momenti secondi e varianze. **Risposta**:

$$p_X(x)=\begin{cases} 0.52 & x=0 \\ 0.35 & x=1 \\ 0.13 & x=10 \\ 0 & altrove \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E(X)=\mu_X=1\times 0.35+10\times 0.13=1.65 \\ E(X^2)=1^2\times 0.35+10^2\times 0.13=13.35 \\ V(X)=\sigma_X^2=E(X^2)-\mu_X^2=13.35-2.7225=10.6275 \end{cases}$$

$$p_Y(y)=\begin{cases} 0.3 & y=-1 \\ 0.25 & y=0 \\ 0.45 & y=1 \\ 0 & altrove \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E(Y)=\mu_Y=-1\times 0.3+1\times 0.45=0.15 \\ E(Y^2)=(-1)^2\times 0.3+1^2\times 0.45=0.75 \\ V(Y)=\sigma_Y^2=E(Y^2)-\mu_Y^2=0.75-0.0225=0.7275 \end{cases}$$

ES. 1(b) **Domanda aggiuntiva**: determinare la covarianza $Cov(X,Y)$ ed il coefficiente di correlazione lineare $\rho(X,Y)$. Inoltre si commenti il valore ottenuto di $\rho(X,Y)$. **Risposta**:

$$E(X,Y)=\sum_{\forall(x,y)} xy\, p_{XY}(x,y)=1\times(-1)\times 0.1+10\times 1\times 0.13=1.2$$

$$Cov(X,Y)=E(X,Y)-\mu_X\mu_Y=1.2-1.65\times 0.15=1.2-0.2475=0.9525$$

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\sigma_X^2}\sqrt{\sigma_Y^2}}=\frac{0.9525}{\sqrt{10.6275}\sqrt{0.7275}}=\frac{0.9525}{3.25\times 0.8529}=\frac{0.9525}{2.7719}=0.3436$$

Il commento richiesto sul valore ottenuto di $\rho(X,Y)$ è il seguente: Il valore ottenuto di $\rho(X,Y)$ indica che tra X e Y vi è una bassa correlazione lineare diretta (o positiva).

ES. 3(a): *avvertenza*: questo caso di test non è più in programma. Sono rimasti in programma **solo** i test bilaterali. Pertanto sostituirlo con il seguente test bilaterale:

(a) Per una popolazione statistica X bernoulliana di parametro *p* e per un campione di ampiezza *n*,scrivere la regione di accettazione e la regione di rifiuto del seguente test con livello di significativit α :

$$H_0: p=p_0 \text{ contro } H_1: p\neq p_0.$$

Risposta:

$$A_\alpha=\left\{\overline{x}_n : p_0-z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0\times(1-p_0)}{n}}<\overline{x}_n<p_0+z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0\times(1-p_0)}{n}}\right\}$$

$$R_\alpha=\left\{\overline{x}_n : \overline{x}_n\le p_0-z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0\times(1-p_0)}{n}},\ \overline{x}_n\ge p_0+z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0\times(1-p_0)}{n}}\right\}$$

(a bis) Determinare la regione di accettazione per il test di cui in (a) sopra con: $\alpha=0.01$, $p_0=0.5$, $n=100$.

Risposta:

$$H_0: p = 0.5 \text{ contro } H_1: p \neq 0.5$$

$$poplazione\ statistica\ X \sim Be(0.5)\ ed\ n = 100 \Rightarrow per\ il\ teorema\ centrale:\ \bar{X}_{100} \sim N\left(0.5; \frac{0.5^2}{100}\right)$$

$$\alpha = 0.01 \Rightarrow \alpha/2 = 0.005 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0.995 \Rightarrow z_{0.995} = 2.576$$

$$A_{0.01} = \left\{ \bar{x}_{100}: \quad 0.5 - 2.576\sqrt{\frac{0.5^2}{100}} < \bar{x}_{100} < 0.5 + 2.576\sqrt{\frac{0.5^2}{100}} \right\} =$$

$$= \left\{ \bar{x}_{100}: \quad 0.5 - 2.576 \times 0.05 < \bar{x}_{100} < 0.5 + 2.576 \times 0.05 \right\} =$$

$$= \left\{ \bar{x}_{100}: \quad 0.5 - 0.1288 < \bar{x}_{100} < 0.5 + 0.1288 \right\} =$$

$$= \left\{ \bar{x}_{100}: \quad 0.3712 < \bar{x}_{100} < 0.6288 \right\}$$

(a ter) Con riferimento al test di cui sopra si sa inoltre quanto segue:
(A) $n = 100$ di cui in (a bis) sopra è l'ampiezza di un campione di potenziali consumatori intervistati sulla preferenza o meno circa un certo prodotto, e
(B) nel campione il 52% di potenziali consumatori ha dato la preferenza al prodotto,
Sulla base di quanto in (A) e (B) si esegua il test di cui in (a bis) sopra, esplicitando la decisione cui dà luogo il test.

Risposta:
$\bar{x}_{100} = 0.52 \in A_{0.01} \Rightarrow$ il test non rifiuta l'ipotesi nulla $H_0: p = 0.5$ al livello di significatività $\alpha = 0.01$, ovvero il test, con probabilità di errore di prima specie $\alpha = 0.01$, non rifiuta l'ipotesi che il 50% dell'intera popolazione dei potenziali consumatori del prodotto dia la sua preferenza a tale prodotto.

ES. 5(b) e 5(c): *Errata corrige*: invece di “ $\frac{25\sigma_X^2}{7}$ ” si legga “ $\frac{27\sigma_X^2}{49}$

_ Soluzioni esame del 17.2.06
_ Soluzioni 1^ prova parziale - Mod. B (10.04.06)
_ Soluzioni 1^ prova parziale - Mod. A (10.04.06)
_ Soluzioni prova parziale del 5.6.06 - mod. A
_ Soluzioni prova parziale del 5.6.06 - mod. B
_ e così di seguito come su Internet.