Metodi quantitativi per la stima del rischio di mercato

Aldo Nassigh

16 Ottobre 2007

- *Bootstrap* della curva dei tassi
- Principal Component Analysis
- Risk Metrics
- Metodi di simulazione per il calcolo del VaR basati su *Full* versus *Partial Revaluation*
- VaR: Simulazione MonteCarlo
- VaR: Simulazione Storica

Bootstrap: costruire la curva zero coupon progressivamente

Esempio: nota la curva sui *tenors* 1,2,3,4 anni, calcolare il tasso zero coupon a cinque anni sulla base del prezzo/yield di un bond con scadenza 5 anni e pagamento cedola annuale:

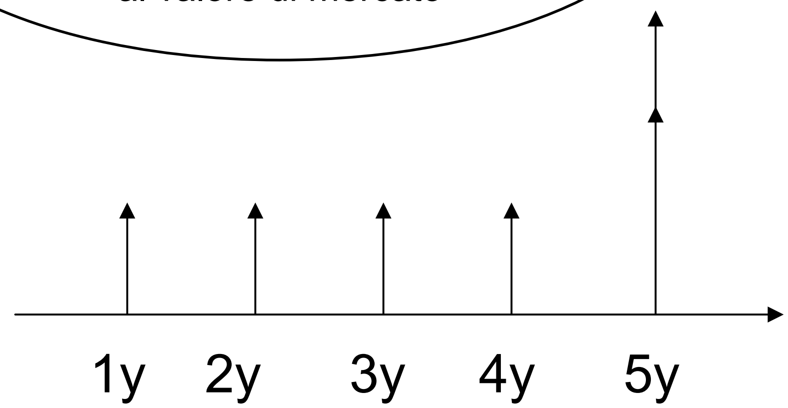
Il *discount factor*
(e di conseguenza, il tasso *zero coupon*)
si calcola numericamente in modo tale
che il PV del bond
corrisponda
al valore di mercato

Anni

1	2	3	4	5
Discount Factors				
96.78%	93.35%	89.87%	86.41%	**82.96%**

Flussi cedolari dei *Par Yield Bonds*

Present Value	1	2	3	4	5
100.0%	3.50%	103.50%			
100.0%	3.62%	3.62%	103.62%		
100.0%	3.71%	3.71%	3.71%	103.71%	
100.0%	3.79%	3.79%	3.79%	3.79%	103.79%



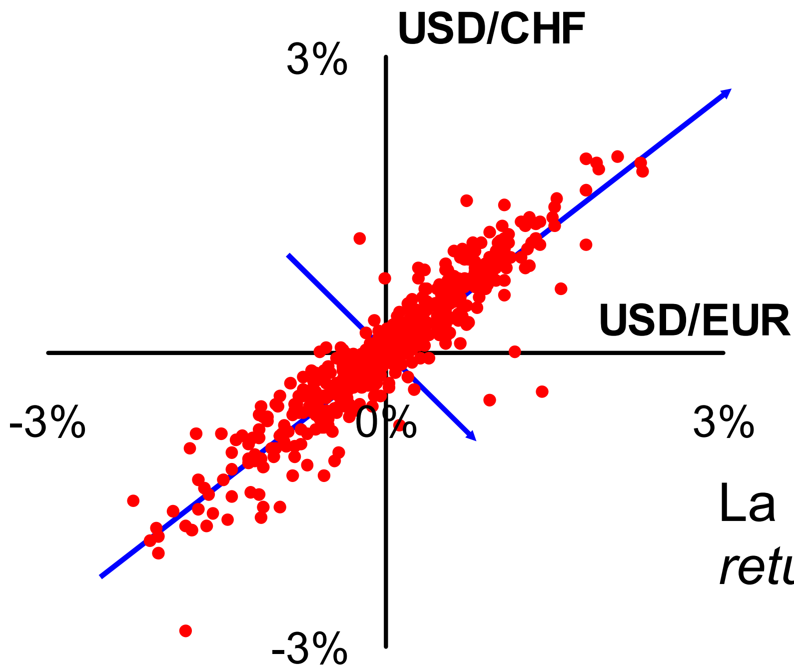
UniCredit

Principal Component Analysis della curva dei tassi

- Le curve dei tassi sono comunemente identificate da un sistema di 10-20 *vertici* (scadenze temporali), tutti indispensabili?
- La PCA è un metodo semplice e standardizzato per ridurre il numero dei fattori di rischio a 2-3.
- La PCA si applica a qualsiasi sistema altamente correlato.

Principal Component Analysis

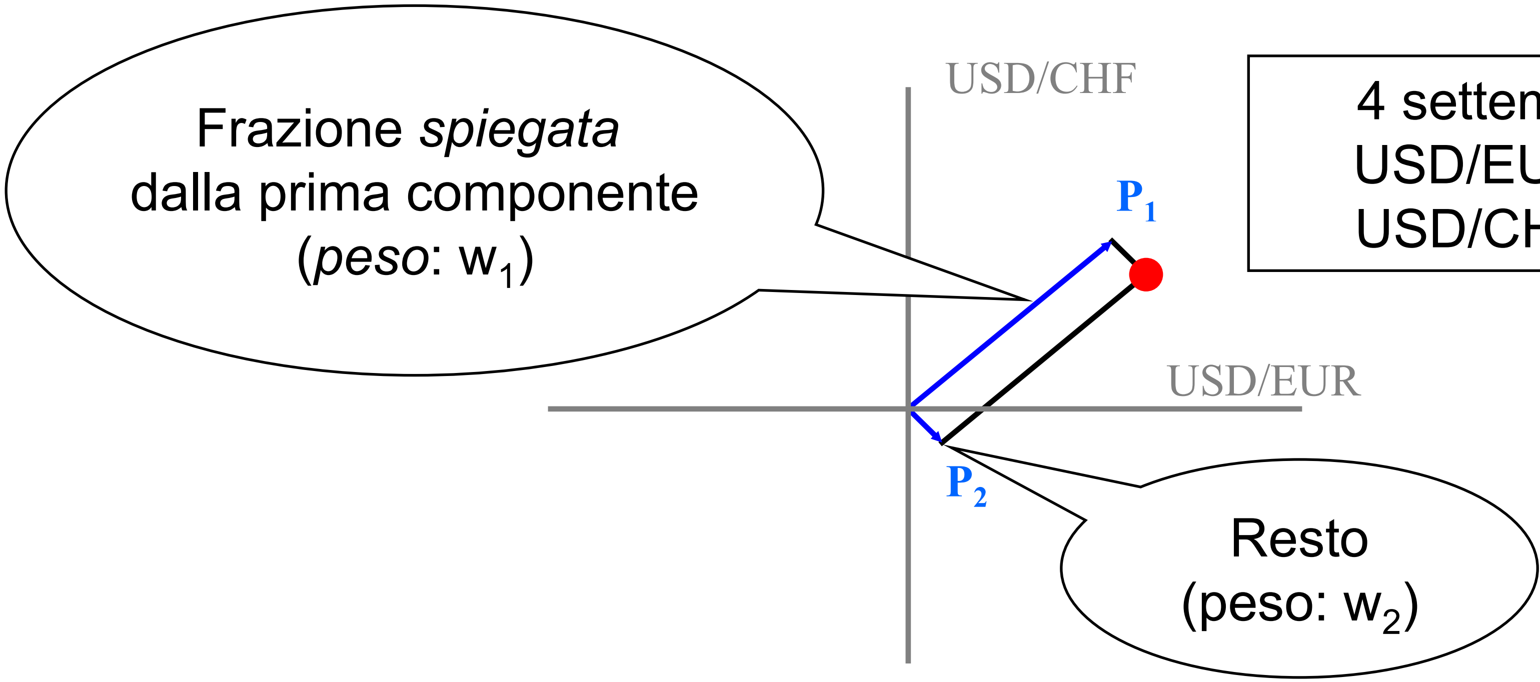
Esempio: due fattori



La correlazione ρ tra i *returns* e' 0.93

Ogni punto corrisponde ad un rilevamento contemporaneo dei *returns* USD/EUR (*asse x*) e USD/CHF (*asse y*). Le frecce blu individuano due nuovi assi: le *Componenti Principali*

Scomposizione di una fluttuazione



4 settembre 2005:
USD/EUR +2.06%
USD/CHF +1.97%

Ogni return R è scomposto nelle componenti lungo i nuovi assi definiti dalle Componenti Principali: $R = w_1 P_1 + w_2 P_2$.

Principal Component Analysis

•Base: serie storiche di T giorni su di n fattori di rischio.

•I returns sono scomposti nella somma di 3 componenti:

$R^i = w_1 \, P^i{}_1 + w_2 \, P^i{}_2 + + w_3 \, P^i{}_3$ + errore i=1…n   t=1…T

•Si calcolano le componenti principali ed i pesi in modo tale da minimizzare l’errore (le componenti devono essere ortogonali).

•Il metodo si può generalizzare ad un numero arbitrario di componenti (sempre minore di n).

Esempio (tassi swap EUR)

Dieci fattori di rischio (n=10), corrispondenti a vertici della curva:

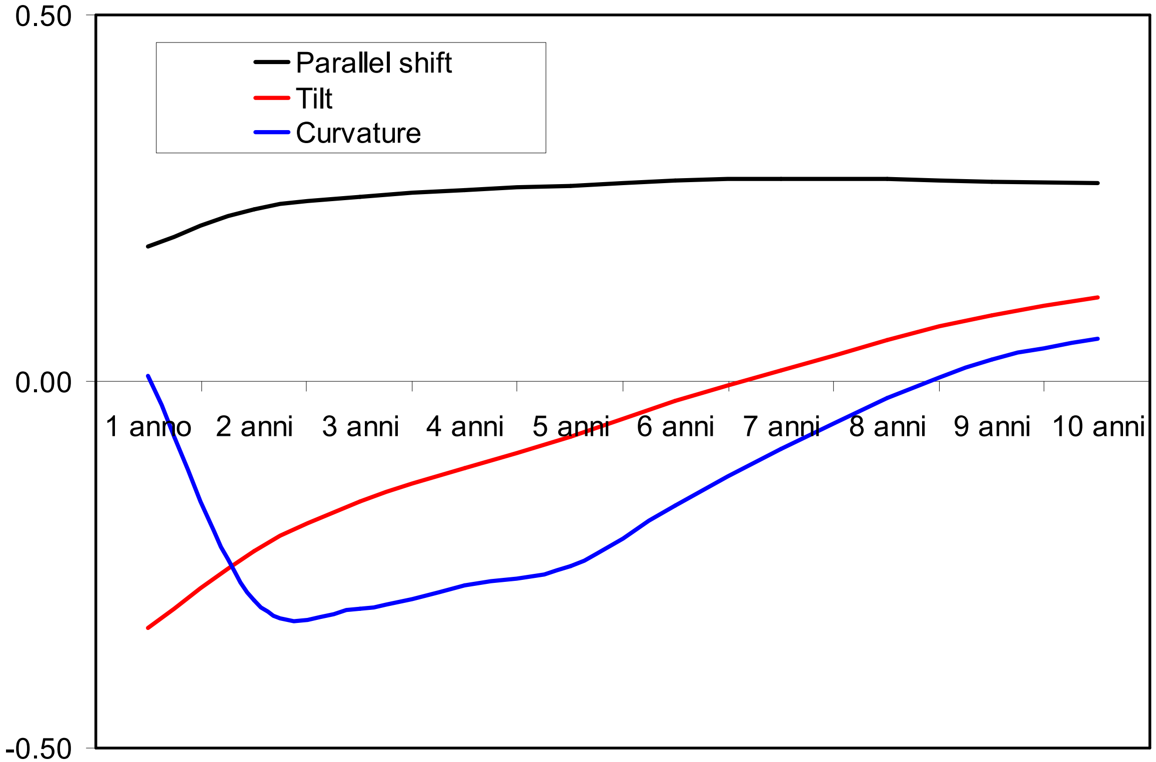
	P1	P2	P3
1 anno	0.18	-0.34	0.01
2 anni	0.24	-0.23	-0.30
3 anni	0.25	-0.16	-0.31
4 anni	0.26	-0.12	-0.28
5 anni	0.27	-0.08	-0.25
6 anni	0.27	-0.03	-0.17
7 anni	0.28	0.01	-0.09
8 anni	0.28	0.06	-0.02
9 anni	0.27	0.09	0.03
10 anni	0.27	0.12	0.06

Interpretazione

Quando la PCA è applicata ad una curva dei tassi, la prima componente corrisponde ad un **parallel shift** per tutte le scadenze.

1. La sola prima componente descrive la maggior parte delle fluttuazioni (85-90%).
2. La seconda componente descrive il **tilt** della curva (5-10% di ogni fluttuazione).
3. La terza componente descrive la **curvatura** della curva (1-5% di ogni fluttuazione).

Rappresentazione grafica



Principal Component Analysis

PCA argomenti *pro* e *contro*

•Pro: Mette in evidenza i movimenti rilevanti: i soli che possono generare profitti/perdite cospicui del portafoglio. Può ridurre drasticamente i tempi di calcolo.

•Contro: La comunicazione tra risk manager e senior management/trading floor non è immediata.

Exponential Weighted Moving Average

$$\sigma = \sqrt{(1-\lambda)\sum_{t=1}^{T}\lambda^{t-1}r^{2}}$$

In modo ricorsivo

$$\sigma^2_{1,t+1|t} = \lambda\sigma^2_{1,t|t-1} + (1-\lambda)r^2_{1,t}$$

RiskMetrics – cash flow mapping

- Conservazione del Present Value
- Conservazione della varianza
- Conservazione del segno

RiskMetrics – cash flow mapping

Calcolo del tasso interpolato

$$y_t = \hat{a} y_{t1} + (1 - \hat{a}) y_{t2}$$

$\hat{a} =$ Coefficiente di interpolazione lineare

$y_t =$ Tasso interpolato

$y_{t1} =$ Tasso ZC a t1

$y_{t2} =$ Tasso ZC a t2

Calcolo del Present Value

$$PV_t = \frac{Cf_t}{(1+r_t)^t}$$

Cf_t = Flusso al tempo t

PV_t = Present Value del flusso al tempo t

r_t = Tasso ZC a t

Calcolo della deviazione standard

$$\sigma_t = \hat{a}\sigma_{t1} + (1-\hat{a})\sigma_{t2}$$

$\hat{a}$ = Coefficiente di interpolazione lineare

σ_t = Deviazione standard dei ritorni a t anni

σ_{t1} = Deviazione standard dei ritorni a t1 anni

σ_{t2} = Deviazione standard dei ritorni a t2 anni

Conservazione della varianza

$$Varianza(r_t) = Varianza[\alpha r_{t1} + (1-\alpha) r_{t2}]$$

$$\sigma_t^2 = \alpha^2 \sigma_{t1}^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho_{t1,t2}\sigma_{t2}\sigma_{t1} + (1-\alpha)^2 \sigma_{t2}^2$$

$\rho_{t1,t2}$ = Coeff di correlazione tra i ritorni a t1 e t2 anni

Risolvendo si ottiene:

$$\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

dove:

$$a = \sigma_{t1}^2 - \rho_{t1,t2}\sigma_{t2}\sigma_{t1} + \sigma_{t2}^2$$

$$b = 2\rho_{t1,t2}\sigma_{t2}\sigma_{t1} - 2\sigma_{t2}^2$$

$$c = \sigma_{t2}^2 - \sigma_t^2$$

RiskMetrics – cash flow mapping

Mapping delle posizoni standardizzate (attualizzate)

$$PV_{t1} = \alpha PV_t$$

$$PV_{t2} = (1 - \alpha) PV_t$$

Dato il portafoglio

$$\Pi = f(S_1, S_2, \ldots, S_K)$$

S_i	:	i-esimo fattore di rischio
τ	:	orizzonte temporale
$y_i^j \quad j = 1 \,..\, N$	:	scenario per i log-returns

Gli scenari dell'i-esimo fattore di rischio con un orizzonte temporale di t giorni sono dati da:

$$S_i^j = S_i e^{\sqrt{\tau} y_i^j} \qquad j = 1 .. N$$

Da cui le rivalutazioni del portafoglio:

$$\Delta\Pi_j = \Pi_j - \Pi$$

Metodi di simulazione per il calcolo del VaR basati sulla *Partial Revaluation*

$$\Delta\Pi_t = \sum_{i=1}^{K} \frac{\partial \Pi}{\partial S_i} \Delta S_i^t + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{K} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S_i \partial S_j} \Delta S_i^t \Delta S_j^t + O(\Delta S_t^3)$$

$$\Delta S_i^t = S_i \left(e^{\sqrt{\tau}\, y_i^t} - 1 \right) \qquad j = 1 \,..\, N$$

Come prima approssimazione si possono trascurare i termini di ordine superiore al primo (rischio delta)…

$$\Delta\Pi_t = \sum_{i=1}^{K} \delta_i \Delta S_i^t \qquad \delta_i = \frac{\partial \Pi}{\partial S_i}$$

VaR: Simulazione MonteCarlo

•Scomposizione della matrice di correlazione

•Generazione scenari opportunamente correlati

Scomposizione di Choleski: calcola la matrice triangolare superiore A, tale che

$$\Sigma = AA^T$$

Vantaggi:

- algoritmo facilmente implementabile

- la matrice P, essendo triangolare, comporta un minor numero di calcoli da effettuare

Svantaggi:

-Σ deve essere definita positiva

Dato ε vettore di elementi casuali normalmente distribuiti, con media 0 e varianza 1, la cui matrice di correlazione è l'identità,

$$y = A^T \varepsilon$$

y è un vettore di elementi casuali la cui matrice di correlazione è proprio Σ.

Nell’approccio più semplice, il vettore dei log-returns simulato è semplicemente il vettore dei log-returns storici:

$$y_i^t = \ln\left(\frac{S_i^t}{S_i^{t-1}}\right)$$

UniCredit