Problem ● Problem *State per comperare una nuova autmobile. Basate la vostra decisione sui seguenti attributi: prezzo (X_1), comfort (X_2) e estetica (X_3). Visitate vari concessionari e dovete prendere una decisione su 3 modelli, A, B e C.*

1. *Per questa decisione occorre stabilire una funzione preferenza (V) o utilità (U)?*
   Sol.: Value
2. *Supponete che la funzione (U o V?) da voi stabilita sia:*

$$y(x_1, x_2, x_3) = \frac{1 + x_2 + x_3}{(x1/10000 + 1)^2} \qquad \#$$

   dove x_2 e x_3 sono stabiliti su scala 0-10 e x_1 è in migliaia di EUR.
   Per i tre modelli stabilite i seguenti valori degli attributi:

3.

	x1	x2	x3
A	10000	4	4
B	15000	5	6
C	20000	6	7

4. *Quale modello comperate?*
   Sol: Il modello che corrisponde al valore più alto della funzione di preferenza è da preferire.
   y(A)=2.25
   y(B)=1.92
   y(C)=1.556
5. *a prescindere dai 3 modelli, quale sarebbe il modello ideale in base alla vostra funzione y?*
   Sol.: Ottimizzazione della funzione y. y ha il massimo globale in 0, 10, 10...!
6. *Avete adesso a che fare con una lotteria, che vi dà in premio uno dei tre modelli con le seguenti probabilità:*
   p(A)=50%
   p(B)=30%
   p(C)=20%
   Considerando solo l'attributo soldi, e prescindendo per il momento da $y(x_1, x_2, x_3)$ quanto sarebbe l'equivalente certo per un giocatore neutro rispetto al rischio? Chiamate questo valore EC. Voi, invece, quanto sareste disposti a spendere per questa lotteria?
   Sol. Vience chiesto l'equivalente certo per il gioco, quando l'unico attributo è il costo. Da:
   *EC=p(A)*10000+p(B)*15000+p(C)*20000 risulta EC* $= 13500$.
7. *Supponendo di considerare ora come funzione utilità $y(x_1, x_2, x_3)$, come equivalente certo per la decisione il valore $y(EC, 5, 5)$, dove y è la funzione a tre attributi precedentemente introdotta, vi converebbe giocare o meno?*
   Occorre risolvere la lotteria considerando la funzione utilità come payoff delle tre alternative e come equivalente certo $y(EC, 5, 5)$.
   Si ha:
   y(Gioco)=p(A)•y(A) +p(B)•y(B) +p(A)•y(C) $= 2.012$

y(EC,5,5)=1.992
Conviene giocare.

Problem *Dovete decidere se allargare o no il vostro magazzino, a seguito del crescere della domanda. Negli ultimi mesi avete registrato il seguente comportamento:*

1. $+ \; + \; - \; + \; + \; - \; - \; + \; - \; -$

dove + indica il numero di volte in cui le scorte sono state sufficienti a far fronte alla domanda e - indica il numero di volte in cui le scorte sono state deficitarie. Basate la decisione sul valore atteso della probabilità che le scorte siano insufficienti. Se tale probabilità fosse superiore al 50% dovreste investire. Cosa decidete (applicate il Teorema di Bayes)?

Per i prossimi dieci mesi, ottenete le seguenti proiezioni se non allargate il magazzino:

$+ \; - \; - \; + \; - \; - \; + \; - \; - \; +$

Basate la decisione sul valore atteso della probabilità che le scorte siano sufficienti. Se tale probabilità fosse superiore al 50% dovreste investire., Cosa decidete ora?

(Suggerimento:

$$\frac{\int_0^1 p^6 \cdot (1-p)^5 dp}{\int_0^1 p^5 \cdot (1-p)^5 dp} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\int_0^1 p^{12} \cdot (1-p)^9 dp}{\int_0^1 p^{11} \cdot (1-p)^9 dp} = .54545)$$

Soluzione

La funzione di verosimiglianza, considerando tutta l'evidenza risulta:

$$L(E \mid p) = \left(\frac{5}{10}\right) p^5 \cdot (1-p)^5 \qquad \#$$

La distribuzione a priori su p è la non informativa uniforme per p tra 0 e 1.

Applicando il Teorema di Bayes nel continuo:

$$\pi_1(p) = \frac{L(E_1 \mid p)\pi_0(p)}{\int_0^1 L(E_1 \mid p)\pi_0(p)dp} = \frac{\left(\frac{5}{10}\right) p^5 \cdot (1-p)^5}{\int_0^1 \left(\frac{5}{10}\right) p^5 \cdot (1-p)^5 dp} = \frac{p^5 \cdot (1-p)^5}{\int_0^1 p^5 \cdot (1-p)^5 dp} \qquad \#$$

Quindi il valore atteso della probabilità di insufficienza delle scorte è:

$$E[p] = \int_0^1 p\pi_1(p)dp = \frac{\int_0^1 p^6 \cdot (1-p)^5 dp}{\int_0^1 p^5 \cdot (1-p)^5 dp} = \frac{1}{2} \qquad \#$$

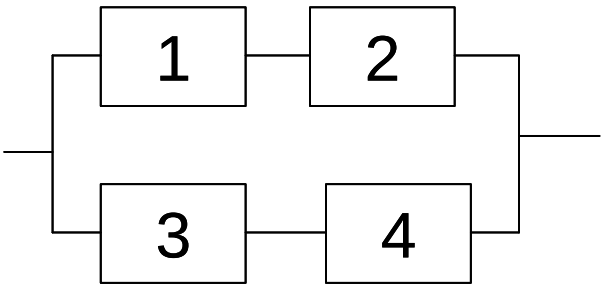
Per la seconda parte, la nuova evidenza deve essere incorporata nella evidenza già ottenuta.

$$\pi_2(p) = \frac{L(E_2 \mid p)\pi_1(p)}{\int_0^1 L(E_2 \mid p)\pi_1(p)dp} = \frac{\left(\frac{6}{10}\right)p^6 \cdot (1-p)^4 \cdot \frac{p^5 \cdot (1-p)^5}{\int_0^1 p^5 \cdot (1-p)^5 dp}}{\int_0^1 \left(\frac{6}{10}\right)p^6 \cdot (1-p)^4 \cdot \frac{p^5 \cdot (1-p)^5}{\int_0^1 p^5 \cdot (1-p)^5 dp} dp} = \frac{p^{11} \cdot (1-p)^{10}}{\int_0^1 p^{11} \cdot (1-p)^{10} dp} \quad \#$$

Quindi il valore atteso di p dopo le previsioni è:

$$E[p] = \int_0^1 p\pi_2(p)dp = \frac{\int_0^1 p^{12} \cdot (1-p)^9 dp}{\int_0^1 p^{11} \cdot (1-p)^9 dp} = 0.5454 \quad \#$$

Problem *State per valutare se investire o meno in una nuova linea di produzione. La linea attuale è caratterizzata da un sistema composto da 4 componenti con la logica in figura:*



I tassi di guasto dei componenti sono:

$\lambda_1 = 10^{-6}\ [1/h]$

$\lambda_2 = 2 \cdot 10^{-6}\ [1/h]$

$\lambda_3 = 3 \cdot 10^{-6}\ [1/h]$

$\lambda_4 = 4 \cdot 10^{-6}\ [1/h]$

Ciasuna delle due linee produce 1500 unità all'anno se il funzionamento è per il 100% del tempo.

La proposta è di sostituirla con una configurazione sempre dello stesso tipo, ma con componenti più affidabili:

$\lambda_1^* = 0.5 \cdot 10^{-6}\ [1/h]$

$\lambda_2^* = 1 \cdot 10^{-6}\ [1/h]$

$\lambda_3^* = 1.5 \cdot 10^{-6}\ [1/h]$

$\lambda_4^* = 2 \cdot 10^{-6}\ [1/h]$

La produttività annua dei componenti è la stessa, ovvero 1500 unità se affidabilità piena.

- *Dovete valutare l'investimento su un periodo di 3 anni. L'investimento costa 100KEUR.*
  Ciascuna unità prodotta frutta un ricavo unitario di 5KEUR, a fronte di un costo

unitario di produzione (contenente sia costi fissi che variabili) di 3KEUR per unità in entrambe i casi.

Cosa decidete?

- *Calcolate la inaffidabilità istantanea del sistema 1*

Funzione di struttura:

$$X_T = X_1X_3 + X_1X_4 + X_2X_3 + X_2X_4 \qquad \#$$

Probabilità che il tempo di rottura sia inferiore a T:
$F(T) = F_1F_3 + F_1F_4 + F_2F_3 + F_2F_4$

Utlizzando distribuzioni esponenziali:
$T = 26280$

$F(T) = (1 - e^{-\lambda_1 T})(1 - e^{-\lambda_3 T}) + (1 - e^{-\lambda_1 T})(1 - e^{-\lambda_4 T}) + (1 - e^{-\lambda_2 T})(1 - e^{-\lambda_3 T}) + (1 - e^{-\lambda_2 T}$

Problem ● *Calcolate la inaffidabilità istantanea del sistema 2*

$F(T) = (1 - e^{-\lambda_1^* T})(1 - e^{-\lambda_3^* T}) + (1 - e^{-\lambda_1^* T})(1 - e^{-\lambda_4^* T}) + (1 - e^{-\lambda_2^* T})(1 - e^{-\lambda_3^* T}) + (1 - e^{-\lambda_2^* T}$

Problem ● *Calcolate la indisponibilità media su tre anni dei due sistemi*

Utilizzando l'approssimazione di Taylor:
$F(T) \approx (\lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4)T^2$
si ottiene:

$$\overline{q} = \frac{\int_0^{3 \cdot 8760} (\lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4) \cdot s^2 ds}{3 \cdot 8760} = .0048344688$$

Similmente:

$$\overline{q}^* = \frac{\int_0^{3 \cdot 8760} (\lambda_1^*\lambda_3^* + \lambda_1^*\lambda_4^* + \lambda_2^*\lambda_3^* + \lambda_2^*\lambda_4^*) \cdot s^2 ds}{3 \cdot 8760} = 1.209 \cdot 10^{-3}$$

- *Calcolate la convenienza economica dell'investimento.*

La convenienza economica dell'investimento è così calcolata. IL profitto legato ad ogni unità è 2KEUR. IL guadagno di produzione è:

A*-A=(1-q*)-(1-q)=q-q*=$.0048344688 - 1.209 \cdot 10^{-3} = .0036254688$

Si producono quindi: $1500 \cdot .0036254688 = 5.4382032$ unità in più. Il maggior profitto è perciò di $5.4382032 \cdot 2 = 10.8764064$ *KEUR* in più, non sufficienti a remunerare il costo del nuovo impianto. L'aumento di affidabilità del nuovo sistema non è quindi sufficiente a compensare la

Problem ● *Se oltre ad un miglioramento della affidabiltà, il secondo sistema vi portasse ad un miglioramento di immagine del prodotto e, quindi, dell'azienda, gli effetti non sarebbero immediatamente monetizzabili. Tuttavia introdurreste una funzione utilità del tipo:*

$$u(m, i) = k_m \cdot m + k_i \cdot i \qquad \#$$

dove $k_m = 1/1000000$ *[1/EUR] e* $k_i = 1$.

Se alla situazione attuale attribuite $i = 0$ *e alla situazione nuova* $i = 5$*, cosa decidete ora?*

Per il vecchio sistema:
$u(m, i) = k_m \cdot m + k_i \cdot i = k_m \cdot (1500 \cdot (1 - .0048344688) \cdot 2000) = 2.985496594$
Per il nuovo:
$u(m, i) = k_m \cdot m + k_i \cdot i = k_m \cdot (1500 \cdot (1 - 1.209 \cdot 10^{-3}) \cdot 2000 - 100000) + 5 = 7.896$
Quindi,se oltre un vantaggio tecnico si è convinti in un vantaggio di immagine, si

dovrebbe investire nel nuovo sistema.

Problem *Qual è l'intervallo di manutenzione ottimale per un componente con tasso di guasto* $\lambda = 2 \cdot 10^{-4}[\frac{1}{h}]$ *soggetto a manutenzione periodica di durata* $\tau_r = 48$ *ore? Se il costo di riparazione del componente è pari a* $c_0 = 10$, *e il costo di indisponibilità del sistema è pari a 100, e la vita del sistema, L, è pari a 10 anni, qual è l'intervallo di manutenzione ottimale?*

Problem *Un componente ha tasso di guasto* $\lambda(t) = |\sin(\pi \cdot t)|$

1. *Qual è la relazione tra il suo tasso di guasto e la sua affidabilità?*
2. *Qual è la relazione tra il suo tasso di guasto e la sua densità di guasto?*
3. *Per questo componente ha senso parlare di intervallo ottimale di manutenzione?*
4. *Calcolate la sua affidabilità istantanea*
5. $e^{-\int_0^s \lambda(t)dt} = \exp\left(\frac{(\cos \pi s)\,\mathrm{signum}(\sin \pi s)-1}{\pi}\right)$
6. *Calcolate la sua densità di guasto in funzione di t.*
   $f(t) = \lambda(t) \cdot R(t) = |\sin(\pi \cdot t)| \cdot \exp\left(\frac{(\cos \pi s)\,\mathrm{signum}(\sin \pi s)-1}{\pi}\right).$

Problem *Data una funzione ri rischio r(x)=sin(x), x>=0, qual è la forma della corrispondente funzione utilità?*

$\sin(x) = \frac{d}{dx}\ln(u'(x)).$

Ne segue:

$\int \sin(x)dx = -\cos x + c = \ln(u'(x)) + k.$

Risolvendo il logaritmo si ha:

$e^{(-\cos x+(c-k)} = u'(x)$

Integrando ancora ambo i membri:

$\int_0^X e^{-\cos(x)+(c-k)}dx = u(X) - u(0)$

Definiamo $A=e^{(c-k)}$, *otteniamo:*

$u(X) = A\int_0^X e^{-\cos(x)}dx + u(0)$