



**Università Carlo Cattaneo  
Facoltà di Ingegneria**

# **Project management**

## **Gli strumenti**

### **Marco Raimondi**

E-mail: [mramondi@liuc.it](mailto:mramondi@liuc.it)

## **Strumenti per il *Project Management***

- **Definizioni base:**
  - **GANTT**
  - **PERT/CPM**

## DEFINIZIONI BASE

**Attività:** *task* del progetto che richiede tempo e risorse.

**Evento:** istante al quale si chiudono una o più attività. Verificatosi l'evento possono iniziare nuove attività.

# Diagramma di Gantt

## **Il diagramma di Gantt**

- **Il diagramma di Gantt è uno strumento di supporto alla gestione dei progetti, così chiamato dal nome dell'ingegnere statunitense che lo ideò nel 1917, Henry Laurence Gantt (1861 - 1919)**
- **Il diagramma è costruito partendo da un asse orizzontale - a rappresentazione dell'arco temporale totale del progetto, suddiviso in fasi incrementali (ad esempio, giorni, settimane, mesi) - e da un asse verticale - a rappresentazione delle mansioni o attività che costituiscono il progetto.**

## Il diagramma di Gantt

- **Barre orizzontali di lunghezza variabile rappresentano le sequenze, la durata e l'arco temporale di ogni singola attività.**
- **Queste barre possono sovrapporsi durante il medesimo arco temporale ad indicare la possibilità dello svolgimento *in parallelo* di alcune delle attività.**
- **Man mano che il progetto progredisce, delle barre secondarie, delle frecce o delle barre colorate possono essere aggiunte al diagramma, per indicare le attività sottostanti completate o una porzione completata di queste.**
- **Una linea verticale è utilizzata per indicare la data di riferimento.**

## Gantt vs. Pert

- **Un diagramma di Gantt permette dunque la rappresentazione grafica di un calendario di attività, utile al fine di pianificare, coordinare e tracciare specifiche attività in un progetto dando una chiara illustrazione dello stato d'avanzamento del progetto rappresentato;**
- **Questa rappresentazione non tiene conto dell'interdipendenza delle attività sottostanti, caratteristica invece della programmazione reticolare, cioè del diagramma Pert.**
- **PERT/CPM è un invece *sistema* di metodologie di gestione progetti, derivante dalla fusione delle tecniche PERT e CPM. Già alla loro nascita (seconda metà anni cinquanta) queste erano molto simili; oggi sono considerate ed utilizzate come unico sistema.**

## IL DIAGRAMMA DI GANTT

In un diagramma tempo/attività, le **attività** sono rappresentate con segmenti di lunghezza proporzionale alla loro durata.

La chiusura dei segmenti rappresenta il verificarsi dell'**evento**.

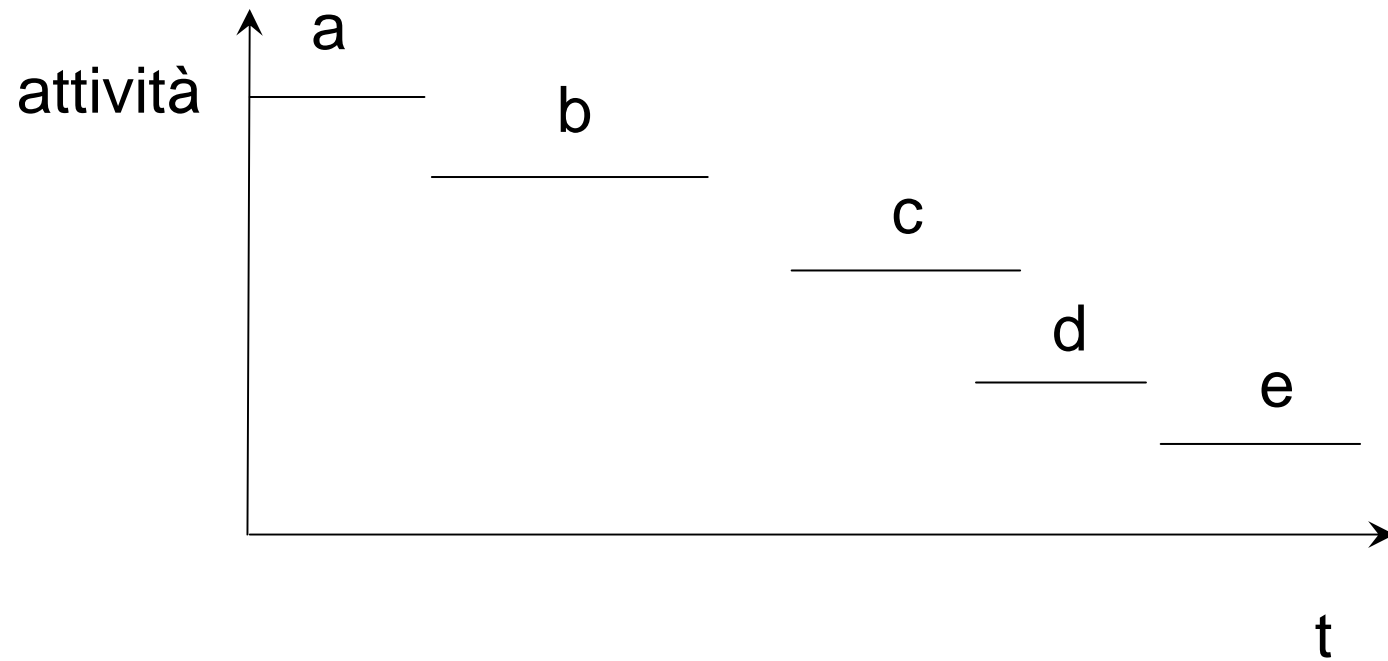
Manca un riferimento esplicito alle **risorse** necessarie per lo svolgimento delle attività

Non sono evidenti le **dipendenze** tra le varie attività.



## IL DIAGRAMMA DI GANTT

Diagramma di Gantt per la rappresentazione temporale delle attività a-e



## IL DIAGRAMMA DI GANTT

Qualora si potessero associare le attività alle risorse disponibili, il diagramma di Gantt può essere impiegato anche per rappresentare il

**carico di una unità operativa.**

Cambia la grandezza delle ordinate;

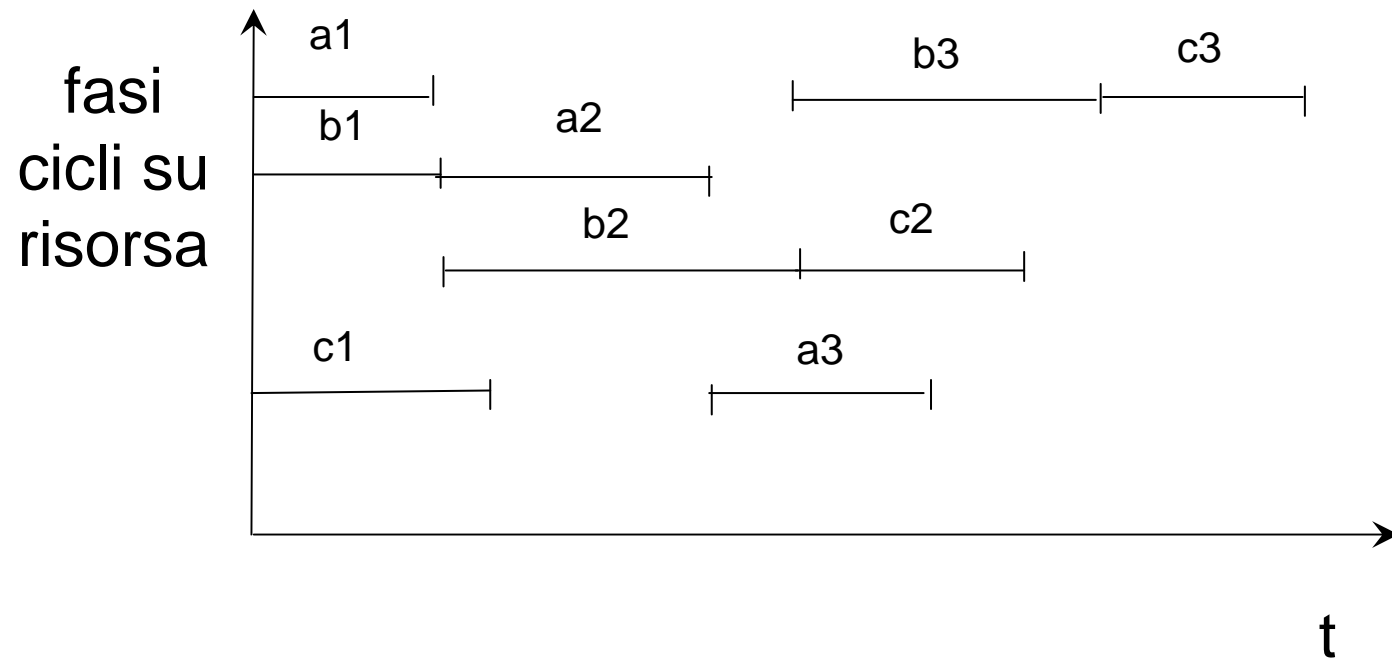
nel caso, per esempio, di un reparto, l'ordinata rappresenta la singola "macchina operatrice" ed i segmenti rappresentano le fasi dei cicli di lavorazione svolte sulla macchina operatrice.

Il carico istantaneo dell'unità operativa può essere valutato sommando le risorse attive nel dato istante.

L'impossibilità di fare svolgere contemporaneamente più attività alla stessa risorsa evidenzia anche, ma in modo parziale e non univoco, la dipendenza tra le varie attività.

# IL DIAGRAMMA DI GANTT

Diagramma di Gantt per la rappresentazione del carico di sequenze di lavori sulle risorse disponibili



## IL DIAGRAMMA DI GANTT

Nel diagramma precedente le risorse disponibili sono 4 mentre i lavori in corso sono 3

Il numero di segmenti intercettati tracciando delle parallele all'asse delle ordinate da la quantità di risorse impiegate istantaneamente.

Il “*makespan*” per il completamento dei tre lavori (ovvero la massima durata della schedulazione) va dall'origine dell'asse del tempo all'istante di completamento della fase 3 del lavoro c.

# **Program Evaluation and Review Technique: PERT**

## La rappresentazione del progetto

- Un progetto consiste, essenzialmente, di una serie di attività interdipendenti che devono essere eseguite con una precisa sequenza.
- Con la tecnica PERT/CPM si rappresenta il flusso logico delle attività mediante un reticolo. Il tipo di reticolo più adottato è quello cosiddetto "ad arco" ed formato da:
  - *freccie*, che rappresentano le attività, ovvero i lavori da svolgere per il completamento del progetto
  - *nodi*, punti di inizio/fine delle attività, che rappresentano eventi nel tempo
- L'attributo principale dell'attività, oltre la descrizione, è la durata prevista. Alcune attività particolari, che rappresentano importanti traguardi intermedi nell'ambito del progetto, vengono denominate "Milestones".

## Nodi e percorsi

- Il primo nodo è sempre quello di inizio progetto; l'ultimo è sempre quello di fine progetto
- Questo tipo di reticolo è molto adatto ad essere trattato con soluzioni informatiche
- I nodi possono essere identificati con un numero e le attività con la coppia dei numeri corrispondenti ai nodi di inizio e fine
- Naturalmente a queste informazioni vengono collegate le descrizioni e, nel caso delle attività, anche le durate.
- I *percorsi* sono identificati mediante la lista dei nodi attraversati ed assumono, come durata (minima - intermedie - massima) la somma dei tempi delle attività comprese nel percorso.

## Diagramma di Pert (1958)

- PERT è l'acronimo che sta per *Program Evaluation and Review Technique*.
- È una tecnica di project management basata su tecniche reticolari e sviluppata nel 1958 dalla Booz, Allen & Hamilton, Inc. (una ditta di consulenza ingegneristica), per l'ufficio Progetti Speciali della Marina degli Stati Uniti.
- L'obiettivo era quello di ridurre i tempi ed i costi per la progettazione e la costruzione dei sottomarini nucleari armati con missili Polaris, coordinando nel contempo diverse migliaia di fornitori e di subappaltatori.



## Diagramma di Pert

- Con questa tecnica si tengono sotto controllo le attività di un progetto utilizzando una rappresentazione reticolare che tiene conto della interdipendenza tra tutte le attività necessarie al completamento del progetto.
- Si noti che l'algoritmo PERT non schedula (cioè non elabora una sequenza temporizzata delle attività stesse), perché non tiene conto della disponibilità delle risorse; **considera cioè che le risorse siano a disponibilità infinita.**

## Diagramma di Pert

- Il succedersi di tutte le fasi del progetto è rappresentato con un grafo dove le **attività sono raffigurate con archi orientati e gli eventi con nodi**. Nei nodi convergono uno o più archi rappresentanti le attività che si concludono nell'evento, dai nodi dipartono uno o più archi rappresentanti le attività che possono iniziare al verificarsi dell'evento.
- Varianti degli algoritmi di tipo PERT:
  - L'algoritmo PERT-Tempi Semplice calcola i tempi minimi e massimi per la realizzazione di ogni attività.
  - L'algoritmo Full PERT-Tempi è lo stesso del PERT Semplice, ma considera la durata delle attività in forma probabilistica.
  - PERT Costi e CPM consentono di effettuare analisi considerando anche i costi associati alle attività.

## La rappresentazione della rete nel PERT

Ci sono due tipi di rappresentazione.

- **Nel primo tipo le attività sono rappresentate da frecce, e gli eventi di inizio e fine attività rappresentano i nodi della rete. Costringe ad impiegare numerose attività fittizie per riuscire ad esprimere tutti i collegamenti tra le attività.**
- **Nel secondo tipo le attività sono rappresentate da rettangoli o cerchi (nodi) ed i vincoli tra le attività sono rappresentati da frecce. È il sistema detto “a precedenze” e permette di raffigurare tutti i tipi di vincolo senza dover ricorrere ad artifici.**

## La rappresentazione della rete nel PERT

- I vincoli (o legami) rappresentano le relazioni tra le attività. Il vincolo più utilizzato è quello Fine-Inizio, che significa che l'attività seguente non può iniziare se quella precedente non è finita. Con lo stesso concetto esistono i vincoli Fine-Fine, Inizio-Inizio, Inizio-Fine. I vincoli, oltre che all'inizio o alla fine di una attività, possono attestarsi anche ad una percentuale di completamento della stessa.
- Ai vincoli può essere assegnata anche una durata, nel caso in cui tra una attività e l'altra debba intercorrere un certo tempo che però non si vuole rappresentare tramite una attività.
- Agli eventi di inizio e fine attività possono venire assegnate delle date prefissate, del tipo data-fissa, non-prima-di, non-dopo-di, in modo da influenzare il calcolo, ove si conoscano a priori restrizioni di questo tipo.
- Bisogna fornire inoltre la specificazione del calendario da utilizzare, cioè quali sono i giorni lavorativi, le festività infrasettimanali ed i periodi di non lavoro, per permettere al sistema di calcolo di riportare sul calendario effettivo i risultati ottenuti.

# Rappresentazione del Pert

Primo metodo



Secondo metodo



## CPM

- CPM è l'acronimo di Critical Path Method, ovvero "metodo del percorso critico"
- È uno strumento di gestione progetti sviluppato nel 1957 dalla Catalytic Construction Company per la manutenzione degli impianti della Du Pont de Nemours.
- Si tratta di una tecnica usata per individuare, nell'ambito di un diagramma a rete (del tipo Pert), la sequenza di attività più critica (massima durata) ai fini della realizzazione di un progetto.
- Lo scopo del CPM è quello di individuare il percorso critico. Il passo successivo è quello di tenere sotto stretto controllo le attività che lo compongono, in quanto un ritardo (maggiore durata del previsto) di una qualsiasi di queste comporta inevitabilmente un ritardo dell'intero progetto.
- È una tecnica molto utilizzata specie dalle imprese di costruzione (strade, ponti, gallerie, grandi infrastrutture, ecc.)

## Il calcolo della tempificazione

- **Semplificando, si eseguono due passate di calcolo**
  - La prima in avanti, partendo dall'inizio progetto. In questa fase si determinano le date al-più-presto dell'inizio e della fine delle varie attività, e la data di fine progetto (se non è stata prefissata)
  - Una seconda passata all'indietro, partendo dalla fine progetto. In questa fase si determinano le date al-più-tardi dell'inizio e fine delle attività
- **Dalla differenza tra le date al-più-tardi e quelle al-più-presto si ricava lo "slittamento" ammesso, che è di due tipi:**
  - lo slittamento libero, cioè il lasso di tempo addizionale di cui può disporre una singola attività senza incidere sulle altre attività,
  - lo slittamento totale è quello di cui può disporre l'intera catena di cui l'attività fa parte, senza andare ad influenzare la data di fine progetto.
  - Se non è stata prefissata la data di fine progetto, le attività che si trovano sul percorso critico hanno slittamento pari a zero.

## Le risorse

- **Ad ogni attività possono essere associati anche il tipo, la quantità ed il profilo di utilizzo delle risorse necessarie ad eseguirla**
- **Sommando le risorse necessarie in base alle date al più presto (o al più tardi) si ottengono degli istogrammi di carico che rappresentano la semplice aggregazione delle risorse, cioè una programmazione a capacità infinita, cioè senza porre dei limiti alle quantità di risorse disponibili nel tempo**
- **Se invece si fornisce un profilo di capacità, cioè di risorse disponibili nel tempo, si può tentare una allocazione delle risorse, cioè una programmazione a capacità finita. Il processo di allocazione tenta di eliminare i sovraccarichi di risorse spostando le attività sfruttando il loro slittamento disponibile.**



## L' aggiornamento in corso d'opera

- **Si fa indicando quando sono iniziate le attività, quando sono finite, e la percentuale di avanzamento (o la durata restante) per quelle iniziate e non finite.**
- **Spesso bisogna rivedere anche i vincoli per adeguare il modello alla effettiva realizzazione.**
- **L' esposizione dei risultati: i risultati del calcolo possono essere forniti in forma tabellare, di diagramma di Gantt, di rappresentazione del reticolo tempificato, di istogrammi e di altri tipi di grafico.**

## L'evoluzione degli algoritmi

- **Nei decenni successivi alla ideazione delle tecniche reticolari, si è assistito ad una progressiva sofisticazione degli algoritmi di calcolo, dei tipi di vincoli, e delle funzionalità connesse.**
- **Con l'avvento delle interfacce grafiche, si tende invece a semplificare di molto gli algoritmi di calcolo, e ad aumentare invece l'interazione con l'uomo per addivenire a programmi più semplici da utilizzare e mantenere aggiornati e di effettivo utilizzo pratico**

## **Stato Avanzamento Lavori (SAL),**

- **Lo Stato Avanzamento Lavori (SAL) in ambito project management, è una riunione periodica che viene stabilita per garantire un'importante caratteristica che devono avere i progetti: il monitoraggio**
- **Il SAL si svolge tipicamente tra il project manager più alcune persone del suo team ed il committente con eventualmente altri interlocutori coinvolti. Può essere mensile o avere una frequenza maggiore o inferiore, dipende dalla durata complessiva del progetto e dalla sua tipologia.**

**I temi trattati sono solitamente:**

- stato attuale del progetto
- rispetto dei tempi e costi
- criticità
- prossime attività
- varie ed eventuali

## Le fasi tipiche di gestione PERT/CPM

- 1. Pianificazione e costruzione del modello (reticolo) di dettaglio***
- 2. Stime dei tempi ed analisi dei percorsi***
- 3. Programmazione operativa***
- 4. Controllo delle operazioni sul progetto in corso d'opera***

## **1. Pianificazione e costruzione del modello (reticolo) di dettaglio.**

- **Ciascun responsabile esecutivo elenca le attività necessarie per lo svolgimento del progetto**
- **l'insieme delle attività viene legato e messo in sequenza secondo la logica de "*l'attività può iniziare solo se ....***

## ***2. Stime dei tempi ed analisi dei percorsi***

- **Ad ogni attività viene attribuita una stima della durata prevista. In passato si tendeva a fornire più di un valore, del tipo *probabile*, *pessimistica*, *ottimistica*.**
- **Negli anni ci si è resi conto che tale consuetudine di fatto non migliorava l'attendibilità complessiva del PERT/CPM, ma allungava solo i tempi di discussione e la complessità dei calcoli.**
- **Con l'analisi dei percorsi si entra nella fase più importante, quella in cui si calcola la durata (stimata) del progetto e si identificano i percorsi critici (tempi più lunghi). L'importanza non è data dal calcolo in se stesso, ma dal fatto che sulla base dei risultati inizia il lavoro di ottimizzazione dell'intero progetto.**
- **Vengono nuovamente analizzate le singole attività, cercate nuove soluzioni tecniche, ecc. È la prima fase di ottimizzazione; Ne derivano, di conseguenza, continue revisioni e riedizioni del modello nel suo complesso.**

### **3. Programmazione operativa**

- **Sulla base dei risultati ottenuti dall'analisi dei percorsi inizia il lavoro di definizione di risorse da impiegare.**
- **Vengono analizzati gli *impegni di manodopera*, la capacità ed il *carico degli impianti*, ecc.**
- **È la seconda fase di ottimizzazione, a volte risolta in termini di compromesso tra spendere di più e finire prima. Anche in questo caso ne derivano revisioni e riedizioni del modello in generale.**

## ***4. Controllo delle operazioni sul progetto in corso d'opera***

- **Il progetto parte ed è necessario controllare che lo svolgersi delle attività sia quello effettivamente previsto, in termini di sequenza, tempi spesi per la realizzazione e risorse impiegate.**
- **Variazioni in corso d'opera (anticipi, ritardi, ecc.) vengono gestiti anche rivedendo, di solito da un dato momento in avanti ed in forma periodica o secondo momenti topici, il modello PERT/CPM.**



## Problemi di aggiornamento

- E' da rilevare che mentre nella fase di studio e di ottimizzazione del progetto il Pert si presta ottimamente allo scopo, nell'aggiornamento in corso d'opera può risultare invece molto laborioso, specialmente in quei progetti nei quali la sequenza delle operazioni ed i vincoli tra le attività non sono nella realtà così rigidi come vengono rappresentati nel reticolo, costringendo quindi anche a frequenti rimaneggiamenti della logica del modello.
- In conclusione va sottolineato che la gestione PERT/CPM, completamente supportata da sistemi software dedicati, ha un costo non insignificante e impone una impostazione organizzativa che spesso non sono alla portata delle piccole aziende.

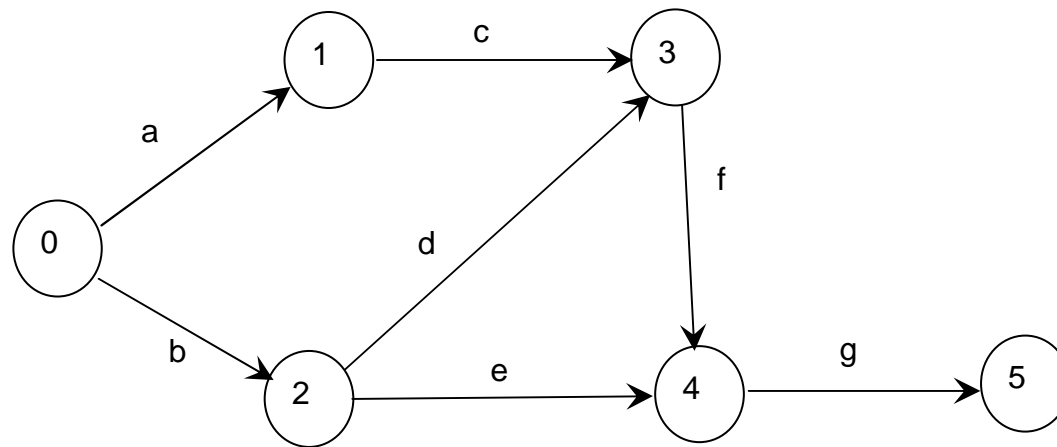
## PERT (tabella delle attività)

Per costruire un PERT si parte da una tabella dove si riporta l'elenco di tutte le attività da svolgere e vi si esplicitano le relazioni di precedenza tra di esse e i tempi per il loro svolgimento

Attività	Precedenze	Tempo (gg)
<b>A</b>	-	<b>5</b>
<b>B</b>	-	<b>10</b>
<b>C</b>	<b>A</b>	<b>3</b>
<b>D</b>	<b>B</b>	<b>2</b>
<b>E</b>	<b>B</b>	<b>4</b>
<b>F</b>	<b>C, D</b>	<b>6</b>
<b>G</b>	<b>F, E</b>	<b>3</b>

## PERT (grafo delle attività)

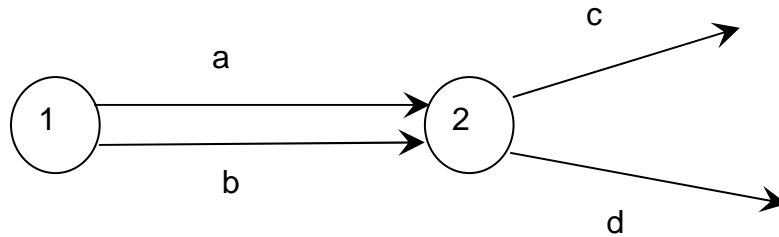
Si passa quindi alla costruzione del **grafo** rispettando esattamente le relazioni di dipendenza (precedenze) tra le varie attività.



## PERT (*dummy activity*)

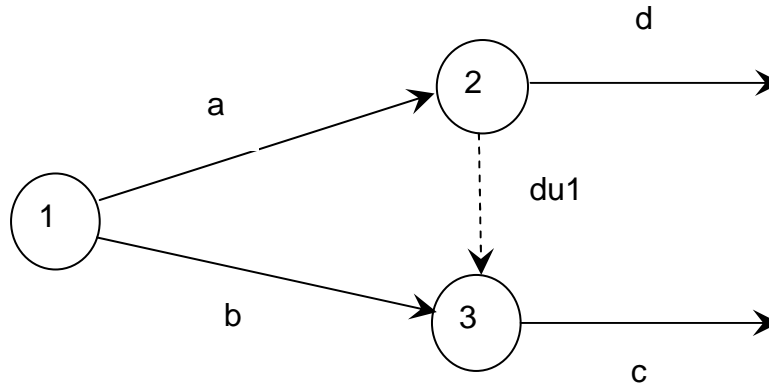
Qualora fosse necessario per evitare di esprimere legami in realtà non esistenti, si introducono attività fittizie (*dummy activity*), rappresentate con archi orientati tratteggiati, che hanno durata nulla ma servono esclusivamente per risolvere punti singolari. Per lo stesso motivo possono essere introdotti anche nodi dove confluiscono solo *dummy activity*.

# PERT (*dummy activity*)



errato, perché l'attività **d** dipenderebbe anche dall'attività **b**.

Attività	Precedenze
A	-
B	-
C	A, B
D	A



corretto. Le attività **a** e **b** confluiscono in nodi diversi collegati da una *dummy activity*. Si può così svincolare l'attività **d** dalla **b**

## **PERT/CPM (percorso critico)**

Dopo la costruzione del grafo, il passo successivo consiste nel calcolo del tempo previsto per il completamento del progetto.

Questo porta alla determinazione del percorso critico che unisce tra loro tutte le attività che svolte in successione senza soluzione di continuità condizionano direttamente la durata del progetto.

L'aumento del tempo di svolgimento di una qualsiasi di tali attività comporta necessariamente un allungamento del tempo di completamento del progetto.

Per determinare quale siano le attività del percorso critico e calcolare il tempo complessivo di sviluppo del progetto, un criterio consiste nel considerare tutti i percorsi che portano dall'evento di inizio all'evento di fine del progetto e sommare i tempi delle attività pertinenti.

## PERT/CPM (percorso critico)

**Il percorso critico è naturalmente quello con il tempo più elevato e le attività critiche sono quelle che vi appartengono.**

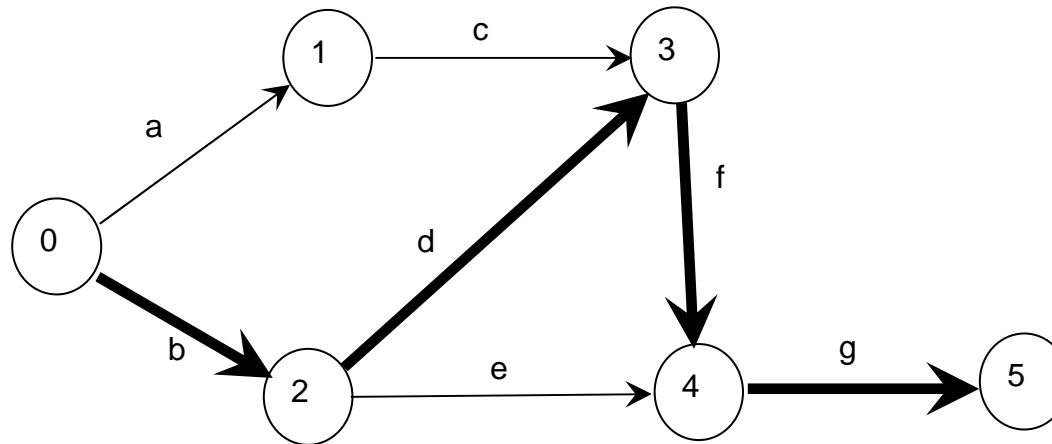
Facendo riferimento all'esempio precedente i percorsi da confrontare sono:

- 1)  $a + c + f + g = 17$  gg.
- 2)  **$b + d + f + g = 21$  gg.**
- 3)  $b + e + g = 17$  gg.

Il percorso critico è dunque quello determinato dalla sequenza delle attività **b, d, f, g**.

La durata complessiva degli altri percorsi può aumentare in entrambi i casi di 4 giorni senza determinare un allungamento del tempo necessario per il completamento del progetto, ovvero l'istante d'inizio delle attività che li compongono può essere ritardato fino ad un massimo di 4 giorni.

## PERT (percorso critico e *slack*)



Tuttavia, prestando attenzione alle composizioni dei percorsi, si può osservare che le operazioni che possono ritardare l'inizio oppure durare di più sono solamente la **a** e la **c** sul percorso 1) e la **e** sul percorso 3); le attività **b**, **f** e **g** infatti fanno anche parte del percorso critico e, come già detto, un loro allungamento o ritardo comporta uno slittamento della data di completamento di tutto il progetto.

**Il termine tecnico che indica di quanto può ritardare l'inizio di un'attività è *slack* (p.e.: l'attività **e** ha uno *slack* di 4).**



## PERT/CPM (percorso critico e *slack*)

**Il modo formalmente corretto per stabilire il percorso critico consiste nel determinare l'istante più anticipato e l'istante più ritardato di accadimento degli eventi (nodi).**

Per calcolare gli istanti di accadimento più anticipati occorre procedere dall'inizio del progetto verso il suo completamento applicando la seguente relazione:

$$T_{\min,x} = \max \left\{ T_{\min,h} + D_h \right\}$$

## PERT/CPM (percorso critico e *slack*)

dove:

$x$  è l'evento per il quale si sta calcolando l'istante di accadimento più anticipato;

$T_{\min,h}$  sono gli istanti di accadimento più anticipati degli eventi dai quali hanno origine le  $h$  attività confluenti nel nodo  $x$ ;

$D_h$  sono le durate delle  $h$  attività confluenti in  $x$ .

Quindi per il nostro esempio:

$$T_{\min,0} = 0$$

$$T_{\min,1} = 5$$

$$T_{\min,2} = 10$$

$$T_{\min,3} = \max \{5+3, 10+2\} = 12$$

$$T_{\min,4} = \max \{12+6, 10+4\} = 18$$

$$T_{\min,5} = 21$$

## PERT/CPM (percorso critico e *slack*)

Per calcolare gli istanti di accadimento più ritardati occorre invece procedere dall'evento di conclusione del progetto verso il suo inizio applicando la seguente relazione:

$$T_{\max,x} = \min \left\{ T_{\max,h} - D_h \right\}$$

## PERT/CPM (percorso critico e *slack*)

dove:

$x$  è l'evento per il quale si sta calcolando l'istante di accadimento più ritardato;

$T_{\max,h}$  sono gli istanti di accadimento più ritardati degli eventi dai quali hanno origine le  $h$  attività confluenti nel nodo  $x$ ;

$D_h$  sono le durate delle  $h$  attività confluenti in  $x$ .

Quindi per il nostro esempio:

$$T_{\max,5} = 21$$

$$T_{\max,4} = 18$$

$$T_{\max,3} = 12$$

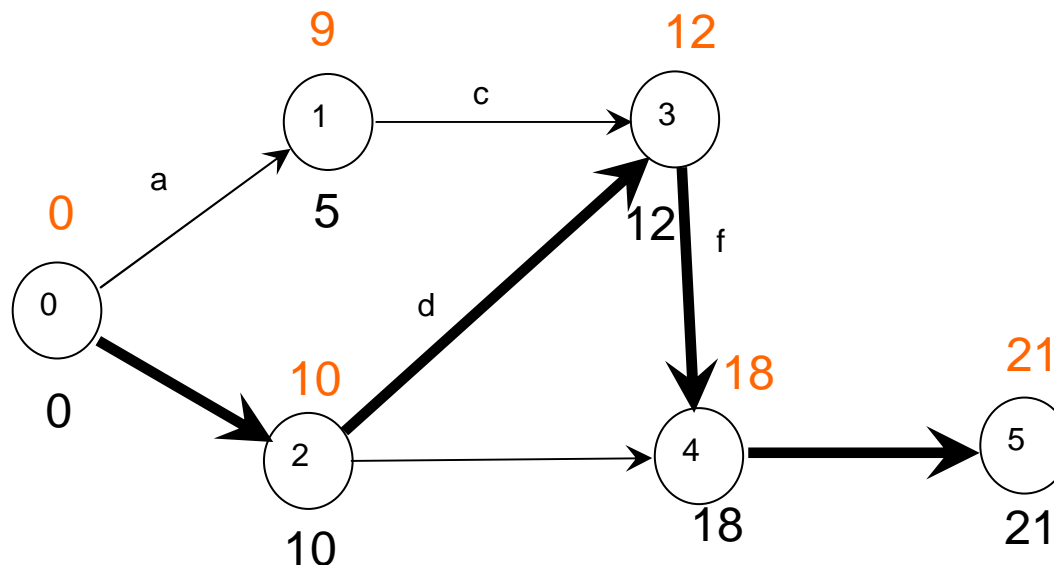
$$T_{\max,2} = \min \{18 - 4, 12 - 2\} = 10$$

$$T_{\max,1} = 9$$

$$T_{\max,0} = \min \{10 - 10, 9 - 5\} = 0$$

## PERT/CPM (percorso critico e *slack*)

Possiamo riportare i tempi degli istanti più anticipati e più ritardati di accadimento degli eventi in corrispondenza dei nodi



**Il percorso critico è quello che congiunge tutti i nodi dove non esiste differenza tra istanti più anticipati e più ritardati di accadimento dell'evento. Ovviamente il percorso corrisponde a quello determinato seguendo anche l'altra modalità.**

## PERT/CPM (percorso critico e *slack*)

Si ribadisce ancora che, se esiste una differenza tra istanti più anticipati e più ritardati di accadimento dell'evento, è possibile ritardare l'inizio delle attività (*slack*) che concorrono (**a**) o partono (**c**) dal nodo fino a un valore massimo corrispondente alla differenza suddetta (p.e.: al nodo 1 per un tempo complessivo massimo di 4 giorni). Le due attività **a** e **c** hanno uno **slack concatenato** massimo di 4 giorni

Inoltre l'attività **e**, che congiunge due nodi che appartengono al percorso critico, non fa parte tuttavia del percorso critico perché, nel caso specifico, il ramo del grafo costituito dalle attività **d + f**, parallelo allo svolgimento di **e** richiede un tempo superiore. Anche l'attività **e** ha pertanto uno **slack libero**, in questo caso, che è pari alla differenza tra le durate delle attività sul ramo parallelo e dell'attività stessa ( $2+6 - 4 = 4$  gg.).

Da notare infine che slittamenti superiori a quelli ammissibili trasformano in **critici** percorsi che non erano tali e che lo slittamento può essere inteso anche come **allungamento** tollerato della durata delle attività, magari con un impiego diverso delle risorse disponibili.

## PERT/CPM: il calcolo dei tempi attesi

Una delle criticità di maggior rilievo nel *project management* è data dall'attendibilità delle durate attribuite alle attività. Nella stragrande maggioranza dei casi tali tempi non sono assolutamente deterministici e la differenza tra durate massima e minima prevedibili può essere spesso molto significativa.

Quindi, per poter stimare i tempi di completamento di un progetto, occorre valutare i **tempi attesi** di svolgimento delle singole attività per potere anche stabilire quanto sia effettivamente affidabile il tempo calcolato per la durata del progetto.

## PERT/CPM: il calcolo dei tempi attesi

Un criterio semplice e empirico per determinare i tempi attesi delle attività parte dall'ipotesi che la distribuzione dei tempi probabili sia simile a quella normale; il tempo atteso  $TA$  per lo svolgimento di un'attività è quindi stimato:

$$TA = (T_{\min} + 4T_{\text{mod}} + T_{\max})/6$$

dove:

$T_{\min}$  = tempo minimo stimato per il suo svolgimento

$T_{\text{mod}}$  = tempo modale stimato per il suo svolgimento

$T_{\max}$  = tempo massimo stimato per il suo svolgimento

Analogamente la varianza  $\sigma^2$  del tempo atteso è stimata:

$$\sigma^2 = [(T_{\max} - T_{\min})/6]^2$$



## PERT/CPM: la valutazione dell'incertezza

Riprendendo l'esempio precedente potremmo costruire questa nuova tabella

Attività	Precedenze	Tempo minimo (gg)	Tempo moda (gg)	Tempo massimo (gg)	Tempo atteso (gg)	$\sigma^2$
<b>A</b>	-	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>7</b>	<b>5</b>	<b>0,44</b>
<b>B</b>	-	<b>8</b>	<b>10</b>	<b>12</b>	<b>10</b>	<b>0,44</b>
<b>C</b>	<b>A</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>0,11</b>
<b>D</b>	<b>B</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>0,11</b>
<b>E</b>	<b>B</b>	<b>1</b>	<b>4</b>	<b>7</b>	<b>4</b>	<b>1</b>
<b>F</b>	<b>C, D</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>6</b>	<b>0,11</b>
<b>G</b>	<b>F, E</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>0</b>

## PERT/CPM: la valutazione dell'incertezza

Per come è stato costruito l'esempio proposto il percorso critico e il tempo di completamento del progetto rimangono gli stessi anche determinandoli attraverso i tempi attesi. Qualora le distribuzioni dei tempi probabili non fossero normali ma sbilanciate in un senso o nell'opposto, il percorso critico, così come la sua durata, potrebbero cambiare.

In ogni caso, note le **varianze** dei tempi delle attività, potremmo valutare l'**attendibilità** del tempo atteso di completamento del progetto ovvero la probabilità di completarlo entro una data assegnata. In sostanza questo significa avere un'utile indicazione se si dovessero assumere **impegni per la data di completamento** di un progetto.

## PERT/CPM: la valutazione dell'incertezza

Se i tempi di svolgimento delle varie attività sono statisticamente indipendenti, la varianza di un insieme di attività è pari alla somma delle varianze delle singole attività.

Pertanto, se si volesse calcolare la probabilità di completare il progetto entro un certo periodo, considerando le distribuzioni delle probabilità dei diversi tempi vicine alla normale, occorre determinare il fattore moltiplicativo  $Z$  della deviazione standard  $\sigma$  che delimita il campo delle occorrenze (probabilità di rispetto dell'ipotesi).

Tornando all'esempio, vogliamo calcolare qual'è la probabilità che il progetto si completi nel tempo massimo di 22 giorni tenuto conto che il tempo atteso di completamento del percorso critico è di 21 giorni.

## PERT/CPM: la valutazione dell'incertezza

Per calcolare il fattore moltiplicativo Z della deviazione standard si applica la relazione seguente:

$$Z = (TM - TPC) / (\sum \sigma^2_{PC})^{1/2}$$

dove:

TM = tempo massimo da valutare = 22 gg

TPC = tempo atteso del percorso critico = 21 gg

$\sum \sigma^2_{PC}$  = sommatoria delle varianze dei tempi attesi estesa a tutte le attività (**b, d, f, g**) del percorso critico

Da cui:

$$Z = (22 - 21) / (0,67)^{1/2} = 1,22$$

Dalla tabella della probabilità cumulata per una distribuzione normale delle probabilità si legge in corrispondenza di 1,22 il valore 0,8888: il progetto ha una probabilità del 88,88% di essere completato entro 22 giorni.

## PERT/CPM: la valutazione dell'incertezza

Si può affrontare anche il problema inverso. Per esempio, entro quale tempo massimo si può completare lo stesso progetto con una probabilità del 98% ?

L'incognita diviene TM dato dall'espressione:

$$TM = Z \cdot (\sum \sigma_{PC}^2)^{1/2} + TPC$$

Dalla tabella della probabilità cumulata per una distribuzione normale delle probabilità si legge in corrispondenza di 0,98 il valore Z di 2,055.

Quindi,

$$TM = 2,055 \cdot (0,67)^{1/2} + 21 = 22,69 \text{ gg.}$$

Per avere la probabilità del 98% di completare il progetto senza oltrepassare il termine si deve ipotizzare un tempo di completamento di 22,69 giorni.

## PERT/CPM: l'influenza dei percorsi non critici

Con i dati a disposizione si può anche valutare con quale probabilità un percorso non critico consenta il completamento del progetto entro il tempo obiettivo. Si dovrà seguire la stessa procedura cambiando opportunamente i dati.

Quindi, tornando al nostro esempio, si vuole valutare quale è la probabilità che il percorso non critico **b + e + g** (tempo atteso 17 gg.) consenta di completare il progetto nel tempo massimo di 22 gg. Si calcola la nuova Z data da:

$$Z = (TM - TPNC) / (\sum \sigma^2_{PNC})^{1/2}$$

dove:

TM = tempo massimo = 22 gg

TPNC = tempo atteso del percorso non critico = 17 gg

$\sum \sigma^2_{PNC}$  = sommatoria delle varianze dei tempi attesi estesa a tutte le attività (**b, e, g**) del percorso non critico

## PERT/CPM: l'influenza dei percorsi non critici

Da cui:

$$Z = (22 - 17)/(1,44)^{1/2} = 4,15$$

Un fattore moltiplicativo di  $\sigma$  superiore a 4 copre praticamente la totalità delle occorrenze. Il progetto quindi non potrà ritardare a causa del percorso **b + e + g** perché il percorso **b + e + g** ha una probabilità del 100% di essere completato in 22 giorni.

Si può anche calcolare quale è la probabilità che il percorso non critico divenga critico attraverso l'espressione

$$Z = (TPC - TPNC)/(\sum \sigma^2_{PNC})^{1/2}$$

dove:

TPC = tempo atteso del percorso critico = 21 gg

TPNC = tempo atteso del percorso non critico = 17 gg

$\sum \sigma^2_{PNC}$  = sommatoria delle varianze dei tempi attesi estesa a tutte le attività (**b, e, g**) del percorso non critico

## PERT/CPM: l'influenza dei percorsi non critici

Ne deriva:

$$Z = (21 - 17)/(1,44)^{1/2} = 3,33$$

Valore cui è associata una probabilità del 99,96% di completare il progetto entro 21 giorni.

La probabilità di completare il progetto in 21 giorni secondo il percorso critico, dato che i tempi di svolgimento delle varie attività sono in linea di massima quelli più probabili, è del 50%.

Tuttavia, per valutare l'effettiva probabilità del completamento del progetto in 21 giorni, occorre considerare anche le probabilità di completamento del progetto negli stessi 21 giorni in funzione degli altri percorsi possibili.

In definitiva, qualora tali percorsi fossero tra loro indipendenti, la probabilità effettiva del completamento del progetto è data dal prodotto delle probabilità attribuibili a ciascun percorso.

Nel nostro caso i due percorsi non sono indipendenti (le attività **b** e **g** compaiono in entrambi); quindi la probabilità effettiva di completamento in 21 giorni è sicuramente inferiore al 50%, ma sarà anche superiore al prodotto delle due probabilità.



## PERT/CPM vs. Gantt

- il PERT/CPM visualizza meglio i collegamenti tra le varie attività e consente di valutare più facilmente i percorsi critici.
- il Gantt offre un'idea più chiara sull'andamento del progetto e permette di controllare meglio i *budget* di risorse e conseguentemente di costi.
- è difficile rappresentare percorsi alternativi sia con il PERT/CPM che con il Gantt. Per questo motivi sono stati proposti anche altri strumenti che tuttavia non sono di uso così semplice e, quindi, non sono molto diffusi.