F86001/2 - Matematica per Economia, Finanza e Management a.a. 2008/09
Esercizi (Funzioni di più variabili)

Esercizi

1. La domanda di patate negli USA (dal 1927 al 1941) è stimata dalla legge

$$D(p, m) = 100p^{-0,8}m^{0,34}.$$

Calcolare le derivate parziali della domanda al reddito (m) ed al prezzo (p).

Soluzione: Si ottiene semplicemente che

$$\begin{aligned} D_m' &= 100 \times 0,34p^{-0,8}m^{0,34-1} = 34p^{-0,8}m^{-0,66} \\ D_p' &= 100 \times (-0,8)\, p^{-0,8-1}m^{0,34-1} = -80p^{-1,8}m^{-0,66} \end{aligned}$$

Si nota quindi che la domanda aumenta all'aumentare del reddito, mentre diminuisce all'aumentare del prezzo.

2. Trovare i punti stazionari delle funzioni

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= -2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 36x_1 + 42x_2 \\ F(x_1, x_2) &= 2x_1^2 + x_1^2x_2 + x_2^2 \\ F(x_1, x_2) &= x_1^4 + x_2^4 - 2(x_1 - x_2)^2 + 2 \\ F(x_1, x_2) &= \left(x_2 - x_1^2\right)\left(x_2 - 4x_1^2\right) \end{aligned}$$

Soluzione: Per tutte le funzioni, la condizione da risolvere è

$$\nabla F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le funzioni sono definite in tutto $\mathbb{R}^2$. Si hanno quindi i gradiente

$$\begin{aligned} \nabla F(x_1, x_2) &= \begin{bmatrix} -2(2x_1 + x_2 - 18) & -2(x_1 + 2x_2 - 21) \end{bmatrix} \\ \nabla F(x_1, x_2) &= \begin{bmatrix} 2x_1(x_2 + 2) & 2x_2 + x_1^2 \end{bmatrix} \\ \nabla F(x_1, x_2) &= \begin{bmatrix} 4\left(-x_1 + x_2 + x_1^3\right) & 4\left(x_1 - x_2 + x_2^3\right) \end{bmatrix} \\ \nabla F(x_1, x_2) &= \begin{bmatrix} 2x_1\left(-5x_2 + 8x_1^2\right) & 2x_2 - 5x_1^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e quindi i punti stazionari

$$\begin{aligned} P &= (5, 8) \\ P_1 &= (0, 0); \quad P_2 = (2, -2); \quad P_3 = (-2, -2) \\ P_1 &= \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right); \quad P_2 = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right); \quad P_3 = (0, 0) \\ P &= (0, 0) \end{aligned}$$

3. Trovare gli eventuali estremanti liberi delle funzioni

$$\begin{aligned}
F(x_1, x_2) &= -2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 36x_1 + 42x_2 \\
F(x_1, x_2) &= 2x_1^2 + x_1^2x_2 + x_2^2 \\
F(x_1, x_2) &= x_1^4 + x_2^4 - 2(x_1 - x_2)^2 + 2 \\
F(x_1, x_2) &= \left(x_2 - x_1^2\right)\left(x_2 - 4x_1^2\right)
\end{aligned}$$

Soluzione: Sono le stesse funzioni di cui al punto precedente. Occorre quindi calcolare la matrice Hessiana ed i segni dei minori principali di NW.

$$\begin{aligned}
\nabla^2 F(x_1, x_2) &= \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \\
\nabla^2 F(x_1, x_2) &= \begin{bmatrix} 2x_2 + 4 & 2x_1 \\ 2x_1 & 2 \end{bmatrix} \\
\nabla^2 F(x_1, x_2) &= \begin{bmatrix} 12x_1^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12x_2^2 - 4 \end{bmatrix} \\
\nabla^2 F(x_1, x_2) &= \begin{bmatrix} 48x_1^2 - 10x_2 & -10x_1 \\ -10x_1 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Calcolando poi le matrici nei punti stazionari si ha

P è un punto di massimo relativo

P_1 è un punto di minimo relativo; P_2 e P_3 non sono classificabili

P_1 e P_2 sono punti di minimo relativo; P_3 non è classificabile

P non è classificabile.

4. Trovare gli estremanti liberi della funzione

$$F(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$$

Soluzione: La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}^2$. Il suo gradiente è

$$\nabla F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1x_2^2 & 2x_1^2x_2 \end{bmatrix}$$

che si annulla negli infiniti punti $(x_1, 0)$ e $(0, x_2)$. Ovvero lungo gli assi cartesiani. La matrice Hessiana risulta essere

$$\nabla F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_2^2 & 4x_1x_2 \\ 4x_1x_2 & 2x_1^2 \end{bmatrix}$$

e quindi avremo

$$\nabla F(0, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i punti non sono classificabili. E, analogamente

$$\nabla F(x_1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x_1^2 \end{bmatrix}$$

Si noti, comunque, che la funzione è sempre non negativa. Quindi il minimo assoluto è 0, il valore raggiunto nei punti indicati.

5. Trovare gli estremanti liberi della funzione

$$F(x_1, x_2) = x_2(x_1 + 5x_2) + x_1^2$$

Soluzione: La funzione è definita in tutto $\mathbb{R}^2$. Il suo gradiente è

$$\nabla F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 & x_1 + 10x_2 \end{bmatrix}$$

che si annulla nel punto $(0, 0)$.
La matrice Hessiana risulta essere

$$\nabla F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$$

da cui si deduce che il punto è di minimo relativo.

6. Trovare gli estremanti vincolati della funzione

$$F(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

rispetto al vincolo

$$4x_1^2 + 4x_2^2 = 1$$

Soluzione: Si imposta la funzione Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\lambda, x_1, x_2) = x_1 x_2 - \lambda\left(1 - 4x_1^2 - 4x_2^2\right)$$

e la relativa condizione necessaria

$$\begin{cases} 1 - 4x_1^2 - 4x_2^2 = 0 \\ x_2 - 8\lambda x_1 = 0 \\ x_1 - 8\lambda x_2 = 0 \end{cases}$$

dalla quale si ricavano i quattro punti stazionari

$$\begin{array}{l} P_1 = \left[\lambda = -\frac{1}{8}, x_1 = \frac{1}{4}\sqrt{2}, x_2 = -\frac{1}{4}\sqrt{2}\right] \\ P_2 = \left[\lambda = \frac{1}{8}, x_1 = -\frac{1}{4}\sqrt{2}, x_2 = -\frac{1}{4}\sqrt{2}\right] \\ P_3 = \left[\lambda = \frac{1}{8}, x_1 = \frac{1}{4}\sqrt{2}, x_2 = \frac{1}{4}\sqrt{2}\right] \\ P_4 = \left[\lambda = -\frac{1}{8}, x_1 = -\frac{1}{4}\sqrt{2}, x_2 = \frac{1}{4}\sqrt{2}\right] \end{array}$$

La matrice Hessiana della funzione Lagrangiana è

$$\nabla^2 \mathcal{L}(\lambda, x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0 & -8x_1 & -8x_2 \\ -8x_1 & -8\lambda & 1 \\ -8x_2 & 1 & -8\lambda \end{bmatrix}$$

Calcolando la matrice nei 4 punti trovati, si ha

$$P_1 \quad \nabla^2\mathcal{L}\left(-\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{4}\sqrt{2}, -\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 2\sqrt{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \det \nabla^2\mathcal{L} = -32 \quad \text{punto di minimo}$$

$$P_2 \quad \nabla^2\mathcal{L}\left(\tfrac{1}{8}, -\tfrac{1}{4}\sqrt{2}, -\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -1 & 1 \\ 2\sqrt{2} & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \det \nabla^2\mathcal{L} = 32 \quad \text{punto di massimo}$$

$$P_3 \quad \nabla^2\mathcal{L}\left(\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{4}\sqrt{2}, \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -1 & 1 \\ -2\sqrt{2} & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \det \nabla^2\mathcal{L} = 32 \quad \text{punto di massimo}$$

$$P_4 \quad \nabla^2\mathcal{L}\left(-\tfrac{1}{8}, -\tfrac{1}{4}\sqrt{2}, \tfrac{1}{4}\sqrt{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 1 & 1 \\ -2\sqrt{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \det \nabla^2\mathcal{L} = -32 \quad \text{punto di minimo}$$

7. Trovare gli estremanti della funzione

$$F(x_1, x_2) = 10x_1^{1/2}x_2^{1/2}$$

rispetto al vincolo

$$6x_1 + 3x_2 = 9$$

Soluzione: In questo caso nel vincolo è esplicitabile una variabile

$$x_2 = 3 - 2x_1$$

che può essere sostituita nella funzione obiettivo, ottenendo

$$F(x_1, 3 - 2x_1) = 10x_1^{1/2}(3 - 2x_1)^{1/2} = f(x_1)$$

In questo modo si può risolvere il problema di ottimizzazione in una variabile della funzione f, trovando

$$10x_1^{1/2}(3 - 2x_1)^{1/2}$$

il punto di massimo relativo $x_1 = \frac{3}{4}$. Quindi il problema vincolato ha un punto di massimo relativo vincolato in $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

8. Trovare gli estremanti della funzione

$$F(x_1, x_2) = x_1x_2$$

rispetto al vincolo

$$x_1^2 + x_2^2 = 4$$

Soluzione: Si imposta la funzione Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\lambda, x_1, x_2) = x_1x_2 - \lambda\left(4 - x_1^2 - x_2^2\right)$$

e la relativa condizione necessaria

$$\begin{cases} 4 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ x_2 - 2\lambda x_1 = 0 \\ x_1 - 2\lambda x_2 = 0 \end{cases}$$

dalla quale si ricavano i quattro punti stazionari

$$\begin{aligned} P_1 &= \left[\lambda = -\tfrac{1}{2}, x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}\right] \\ P_2 &= \left[\lambda = \tfrac{1}{2}, x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}\right] \\ P_3 &= \left[\lambda = \tfrac{1}{2}, x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}\right] \\ P_4 &= \left[\lambda = -\tfrac{1}{2}, x_1 = -\sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2}\right] \end{aligned}$$

La matrice Hessiana della funzione Lagrangiana è

$$\nabla^2 \mathcal{L}(\lambda, x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0 & -2x_1 & -2x_2 \\ -2x_1 & -2\lambda & 1 \\ -2x_2 & 1 & -2\lambda \end{bmatrix}$$

Calcolando la matrice nei 4 punti trovati, si ha

$$\begin{array}{llll} P_1 & \nabla^2 \mathcal{L}\left(-\tfrac{1}{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 2\sqrt{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} & \det \nabla^2 \mathcal{L} = -32 & \text{punto di minimo} \\ P_2 & \nabla^2 \mathcal{L}\left(\tfrac{1}{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -1 & 1 \\ 2\sqrt{2} & 1 & -1 \end{bmatrix} & \det \nabla^2 \mathcal{L} = 32 & \text{punto di massimo} \\ P_3 & \nabla^2 \mathcal{L}\left(\tfrac{1}{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -1 & 1 \\ -2\sqrt{2} & 1 & -1 \end{bmatrix} & \det \nabla^2 \mathcal{L} = 32 & \text{punto di massimo} \\ P_4 & \nabla^2 \mathcal{L}\left(-\tfrac{1}{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 1 & 1 \\ -2\sqrt{2} & 1 & 1 \end{bmatrix} & \det \nabla^2 \mathcal{L} = -32 & \text{punto di minimo} \end{array}$$

9. Un imprenditore vinicolo ha a disposizione 1000 ettari da allocare a vigna. Può scegliere tra due differenti tipi di uve con rese diverse. La produzione (numero di bottiglie) per ogni tipo di uva, in funzione dell'estensione (in ettari l_i) della coltivazione è

$$y_1 = l_1^{0.6} \quad \text{e} \quad y_2 = l_2^{0.8}$$

Sapendo che, in media, l'uva 1 produce vino del valore di 10 euro/bottiglia e l'uva 2 di 8 euro/bottiglia, calcolare l'allocazione ottimale (cioè che massimizzi il ricavo) del terreno.

Soluzione: E' necessario costruire la funzione obiettivo, ovvero la funzione di ricavo

$$R(l_1, l_2) = 10 l_1^{0.6} + 8 l_2^{0.8}$$

Per completate il problema occorre anche considerare il vincolo dovuto all'estensione complessiva del terreno

$$l_1 + l_2 = 1000$$

Si tratta quindi di trovare eventuali massimi relativi vincolati della funzione obiettivo $R(l_1, l_2)$. Il problema può essere risolto attraverso la funzione Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\lambda, l_1, l_2) = 10 l_1^{0.6} + 8 l_2^{0.8} + \lambda (1000 - l_1 - l_2)$$

La condizione necessaria risulta essere

$$\begin{cases} 1000 - l_1 - l_2 = 0 \\ 6 l_1^{-0.4} - \lambda = 0 \\ 6.4 l_2^{-0.2} - \lambda = 0 \end{cases}$$

che produce l'unico punto stazionario $P : [\lambda = 1.616\,3, l_1 = 26.551, l_2 = 973.45]$. La matrice Hessiana è

$$\nabla^2 \mathcal{L}(\lambda, l_1, l_2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2.4 l_1^{-1.4} & 0 \\ -1 & 0 & -12.8 l_2^{-1.2} \end{bmatrix}$$

e, nel punto P risulta

$$\det \nabla^2 \mathcal{L}(1.616\,3, 26.551, 973.45) = 2.767\,1 \times 10^{-2} > 0$$

quindi il punto è di massimo relativo vincolato. Si osservi che $\lambda = 1.616\,3$ consente di stimare la variazione dei ricavi per un ettaro in più o in meno a disposizione.

10. Trovare gli eventuali estremanti della funzione

$$F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 1$$

rispetto al vincolo

$$x_1^2 + 4x_2^2 = 16$$

Soluzione: Si imposta la funzione Lagrangiana

$$\mathcal{L}(\lambda, x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 1 - \lambda \left(16 - x_1^2 - 4x_2^2\right)$$

e la relativa condizione necessaria

$$\begin{cases} 16 - x_1^2 - 4x_2^2 = 0 \\ 2x_1 - 2 - 2\lambda x_1 = 0 \\ 2x_2 - 8\lambda x_2 = 0 \end{cases}$$

dalla quale si ricavano i quattro punti stazionari

$$\begin{aligned} P_1 &= \left[\lambda = \tfrac{1}{4}, x_1 = \tfrac{4}{3}, x_2 = -\tfrac{4}{3}\sqrt{2}\right] \\ P_2 &= \left[\lambda = \tfrac{1}{4}, x_1 = \tfrac{4}{3}, x_2 = \tfrac{4}{3}\sqrt{2}\right] \\ P_3 &= \left[\lambda = \tfrac{5}{4}, x_1 = -4, x_2 = 0\right] \\ P_4 &= \left[\lambda = \tfrac{3}{4}, x_1 = 4, x_2 = 0\right] \end{aligned}$$

La matrice Hessiana della funzione Lagrangiana è

$$\nabla^2 \mathcal{L}(\lambda, x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0 & -2x_1 & -8x_2 \\ -2x_1 & 2-2\lambda & 0 \\ -8x_2 & 0 & 2-8\lambda \end{bmatrix}$$

Calcolando la matrice nei 4 punti trovati, si ha

P_1 $\quad \nabla^2 \mathcal{L}\left(\frac{1}{4}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\sqrt{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{32}{3}\sqrt{2} \\ -\frac{8}{3} & \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{32}{3}\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \det \nabla^2 \mathcal{L} = -\frac{1024}{3}$ $\quad$ punto di minimo

P_2 $\quad \nabla^2 \mathcal{L}\left(\frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\sqrt{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{8}{3} & \frac{32}{3}\sqrt{2} \\ -\frac{8}{3} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{32}{3}\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \det \nabla^2 \mathcal{L} = -\frac{1024}{3}$ $\quad$ punto di minimo

P_3 $\quad \nabla^2 \mathcal{L}\left(\frac{5}{4}, -4, 0\right) = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 8 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$ $\quad \det \nabla^2 \mathcal{L} = 512$ $\quad$ punto di massimo

P_4 $\quad \nabla^2 \mathcal{L}\left(\frac{3}{4}, 4, 0\right) = \begin{bmatrix} 0 & -8 & 0 \\ -8 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ $\quad \det \nabla^2 \mathcal{L} = 256$ $\quad$ punto di massimo