Università C. Cattaneo, Corso di laurea in Economia Aziendale, A.A. 2007-2008

STATISTICA – 11.06.08 – Modalità F

(A) ai fini della valutazione verranno considerate solo le risposte riportate dallo studente negli appositi riquadri bianchi.
(B) nello svolgimento del compito si utilizzino almeno quattro cifre decimali.
(C) a coloro che siano sorpresi a consultare appunti, libri o foglietti, o che parlino con altri verrà annullata la prova.

Codice esame_________ **Cognome**_____________________________ **Nome**________________**Matr.** ___

ESERCIZIO 1.1 (punti 8). Un investitore rileva il prezzo di un certo titolo $n=5$ volte in una giornata. L'investitore è interessato al numero Y delle volte che il prezzo del titolo è ≥ 2 \$ E' noto che è pari a $p=0.7$ la probabilità che il prezzo del titolo in una rilevazione sia ≥ 2 \$.

a) (punti 2) Si dica quale è la variabile aleatoria notevole Y che rappresenta il numero delle volte che il prezzo del titolo è ≥ 2 \$ nelle $n=5$ rilevazioni. $\boxed{Y \sim Bi(5;0.7)}$

b) (punti 2) Mostrando gli opportuni calcoli, si determini la probabilità che il prezzo del titolo risulti ≥ 2 \$in nessuna delle $n=5$ rilevazioni. $P(Y=0)=p_Y(0)=\binom{5}{0}0.7^0 0.3^5=0.3^5=0.0024$

c) (punti 4) Mostrando gli opportuni calcoli, si determini la probabilità che il prezzo del titolo risulti ≥ 2 \$ almeno una volta nelle $n=5$ rilevazioni. $P(Y\geq 1)=1-P(Y=0)=1-0.3^5=1-0.0024=0.9976$

ESERCIZIO 1.2 (punti 2). $R_t \sim N(0;1)$ è la variabile aleatoria che rappresenta il rendimento di un titolo al tempo t.

a) (punti 2) Giustificando la risposta, si determini la probabilità che il rendimento del titolo al tempo t non superi 0.1.

$P(R_t \leq 0.1)=0.5398$ (tavola gaussiana standardiz.: <u>riga</u> 0.1 e <u>colonna</u> 0.00)

ESERCIZIO 1.3 (punti 6) Le variabili aleatorie X e Y rappresentano il rendimento di due titoli X e Y.

a) (punti 2+2) Sapendo che per la variabile aleatoria X è $E(X)=0.03$ e $V(X)=0.5$ determinare, mostrando i calcoli, $E(Y)$ e $V(Y)$ per la variabile aleatoria $Y=g(X)=2X-0.03$.

$\boxed{E(Y)=2\times 0.03-0.03=0.03}$; $\boxed{V(Y)=2^2\times V(X)=4\times 0.5=2}$

b) (punti 2) Motivando la risposta, dire quale dei due titoli X e Y è più rischioso.

Y è più rischioso perché $\boxed{V(Y)=2>V(X)=0.5}$

ESERCIZIO 1.4 (punti 2) La variabile aleatoria X ha funzione di probabilità $p_X(x)$ sotto indicata, determinare la variabile aleatoria $Y=g(X)=X^2$.

$$p_X(x)=\begin{cases}0.1 & x=-0.2,0.2\\ 0.2 & x=-0.05,0.05\\ 0.4 & x=0\\ 0 & altrove\end{cases} \Rightarrow Y=g(X)=X^2=\begin{cases}0 & 0.0025 & 0.04\\ 0.4 & 0.4 & 0.2\end{cases}$$

ESERCIZIO 1.5 (punti 6). Si consideri la seguente tabella relativa alla variabile statistica X continua per intervalli.

$[x_i, x_{i+1})$	c_i = densità di frequenza
[-2,0)	0.1

[0,2)	0.25
[2,6)	0.05
[6,8)	0.05

a) (punti 2) Determinare la frequenza relativa p_i di ciascun intervallo $\left[x_i, x_{i+1}\right)$.

$$p_1 = 0.1\times 2 = 0.2\,;\;\; p_2 = 0.25\times 2 = 0.5\,;\;\; p_3 = 0.05\times 4 = 0.2\,,\;\; p_3 = 0.05\times 2 = 0.1$$

b) (punti 4) Determinare la mediana della variabile statistica X.

$\boxed{q_2 = x_{0.5}} = 2 + \left(0.5 - 0.2\right)/0.25 = 2 + 1.2 = \boxed{3.2}$

ESERCIZIO 1.6 (punti 8) Si consideri la seguente variabile statistica X che rappresenta il numero di telefonini di N famiglie di un certo Comune italiano.

$$X = \begin{cases} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0.05 & 0.55 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{cases}$$

a) (punti 6) Giustificando la risposta, indicare i valori di media, moda e mediana della variabile statistica X.

$M\left(X\right) = 2\times 0.55 + 4\times 0.2 + 6\times 0.1 + 8\times 0.1 = 1.1 + 0.8 + 0.6 + 0.8 = 3.3\,,\; Mod\left(X\right) = 2, Med\left(X\right) = 2$

b) (punti 2) Verificare se per la variabile statistica X vale la relazione $\mathrm{mod}\left(X\right) \le med\left(X\right) \le M\left(X\right)$ ed in caso affermativo indicarne il significato. $\mathrm{mod}\left(X\right) = 2 = med\left(X\right) < 3.3 = M\left(X\right)$

la relaz e verificata ed indica che la variabile è obliqua a destra.

ESERCIZIO 2.1 (punti 6) S_t è la variabile aleatoria che rappresenta il prezzo di un titolo al tempo $t > 0$. Il prezzo s_0 del titolo al tempo $t = 0$ è stato $s_0 = 3$ €. Nel periodo di tempo $\left(0, t\right]$ il rendimento R_t del titolo è una variabile aleatoria $R_t \sim N\left(0.04; 0.36\right)$. Mostrando i calcoli si determini: **(a)** la probabilità che il prezzo S_t del titolo al tempo *t* non superi il valore $3e$ € ($e = 2.7183$); **(b)** il valore medio atteso del prezzo S_t sapendo che $E\left(e^{R_t}\right) = e^{\mu_{R_t} + \sigma^2_{R_t}/2}$.

(a) (punti 4) $P\left(S_t \le 3e\right) = P\left(3e^{R_t} \le 3e\right) = P\left(e^{R_t} \le e\right) = P\left(R_t \le 1\right) = P\left(N\left(0;1\right) \le \dfrac{1 - 0.04}{0.6} = \dfrac{9.6}{6} = 1.6\right) = 0.9542$

(c) (punti 2) $E\left(S_t\right) = E\left(s_0 e^{R_t}\right) = s_0 E\left(e^{R_t}\right) = s_0 e^{\mu_{R_t} + \sigma^2_{R_t}/2} = 3e^{0.04 + 0.36/2} = 3e^{0.22} = 3\times 0.2461 = 3.7383$

ESERCIZIO 2.2 (10 punti) Sia *X* una popolazione statistica con valore atteso μ_X e varianza σ_X^2. Per stimare μ_X si considera lo stimatore $T_n\left(X_1, .., X_n\right) = \bar{X}_n - \dfrac{2}{n} + 3$. Mostrando i calcoli si determini: **(a)** la distorsione di T_n, **(b)** la varianza di T_n, **(c)** l'errore quadratico medio di T_n, ed infine **(d)** si verifichi se T_n è consistente o meno per il parametro μ_X.

(a) (punti 2) $E\left(T_n\right) - \mu_X = E\left(\bar{X}_n - \dfrac{2}{n} + 3\right) - \mu_X = \left(\mu_X - \dfrac{2}{n} + 3\right) - \mu_X = -\dfrac{2}{n} + 3$

(b) (punti 2) $V\left(T_n\right) = V\left(\bar{X}_n - \dfrac{2}{n} + 3\right) = V\left(\bar{X}_n\right) = \dfrac{\sigma_X^2}{n}$

(c) (punti 2) $EQM\left(T_n\right) = V\left(T_n\right) + \left(E\left(T_n\right) - \mu_X\right)^2 = \dfrac{\sigma_X^2}{n} + \left(-\dfrac{2}{n} + 3\right)^2$

(d) (punti 4) $\lim\limits_{n\to\infty} E\left(T_n\right) - \mu_X = \lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{2}{n} + 3\right) = 3,\; \lim\limits_{n\to\infty} V\left(T_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sigma_X^2}{n} = 0,\; \lim\limits_{n\to\infty} EQM\left(T_n\right) = 3^2 = 9$

ESERCIZIO 2.3 **(8 punti)** Per una popolazione statistica $X \sim N\left(\mu_X;\sigma_X^2\right)$ con σ_X^2 non noto, un campionamento di dimensione $n=20$ ha dato i seguenti risultati campionari: $\sum_{i=1}^{20} x_i = 210$, $\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 2870$. Mostrando i calcoli si determini: **(a)** la stima puntuale di σ_X^2, **(b)** la regione di accettazione per il test bilaterale dell'ipotesi $H_0: \mu_X = 10$ al livello di significatività 0.2, **(c)** la decisione cui perviene il test di cui in b).

(a) (punti 2) $\hat{\sigma}_X^2 = s_c^2 = \dfrac{n}{n-1}s^2 = \dfrac{20}{19}\left[\dfrac{2870}{20} - \left(\dfrac{210}{20}\right)^2\right] = \dfrac{20}{19}(143.5-110.25) = 1.0526\times 33.25 = 34.999$

(b) (punti 4) $A_{0.2} = \left(10.5 \mp t_{0.9}^{19}\sqrt{\dfrac{34.999}{20}}\right) = \left(10.5 \mp 1.328\sqrt{\dfrac{34.999}{20}}\right) = \left(10 \mp 1.328\sqrt{1.7499}\right) = (8.2501, 11.7499)$

(c) (punti 2) $\overline{x}_{20} = \dfrac{210}{20} = 10.5 \in A_{0.2}$ si accetta l'ipotesi nulla.

ESERCIZIO 2.4 **(8 punti)** Si consideri il modello di regressione lineare $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ ($i = 1,...,n = 119$). Le coppie osservate (x_i, y_i) (dove x_i = prezzo e y_i = redditività di un certo prodotto negli ultimi $n = 119$ giorni) sono state elaborate con il software statistico SPSS che ha dato i risultati riportati nel tabulato di pag. 6. Sulla base del tabulato si risponda alle seguenti domande: **(a)** si scriva la stima per intervallo di confidenza di β_1 con coefficiente confidenza 0.95. **(b)** si esegua il test di $H_0: \beta_1 = 0$ contro $H_1: \beta_1 \neq 0$ al livello di significatività 0.05 giustificando la risposta, **(c)** si calcoli la previsione della redditività media attesa in corrispondenza del prezzo $x = 9$ e si commenti, sulla base di un opportuno indice, l'affidabilità della previsione.

(a) (punti 2) $IC_{0.95}(\beta_1) = (-0.012, 0.003)$

(b) (punti 2) si accetta perché $\beta_1 = 0 \in IC_{0.95}(\beta_1)$

(c) (punti 4) $\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 9 = 0.33 - 0.005\times 9 = 0.33 - 0.045 = 0.285$ con $R^2 = 0.013$ **non è affidabile**

TABULATO SPSS

Regressione

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.114[a]	.013	.005	1.3574

a. Predictors: (Constant), TIME

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	2.863	1	2.863	1.554	.215[a]
	Residual	215.587	117	1.843		
	Total	218.450	118			

a. Predictors: (Constant), TIME

b. Dependent Variable: NIKKEI

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	95% Confidence Interval for B	
		B	Std. Error	Beta			Lower Bound	Upper Bound
1	(Constant)	.330	.250		1.318	.190	-.166	.826
	TIME	-.005	.004	-.114	-1.246	.215	-.012	.003

a. Dependent Variable: NIKKEI