Università Carlo Cattaneo

Corso di laurea in Economia Aziendale

STATISTICA – Prima Prova Parziale 31.10.2008 – Modalità B

NB: **(A)** Ai fini della valutazione verranno considerate solo le risposte riportate dallo studente negli appositi riquadri bianchi del testo d'esame. **(B)** Nello svolgimento del compito, si utilizzino almeno quattro cifre decimali. **(C)** Allo studente/studentessa che consulti foglietti, appunti, libri , ecc o che parli con altri sarà annullata la prova d'esame.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1 (punti 6). Vengono rilevate le durate (in minuti) delle connessioni internet mediante ADSL effettuate dai clienti di un provider in una certa fascia oraria. I dati rilevati sono riportati nella tabella che segue:

Intervallo durata	Frequenze relative
[0,30]	0.25
(30,90]	0.25
(90,180]	0.20
(180,360]	0.15
(360,600]	0.15

a) Si disegni un grafico per rappresentare in modo opportuno la distribuzione delle durate.
b) Si determinino la durata mediana, la durata modale delle connessioni e la durata media.
c) Si determini la percentuale di connessioni la cui durata differisce dalla durata media per meno di 50 minuti.

a) Per disegnare l'istogramma bisogna calcolare le densità c_i per ciascun intervallo, ovvero:

$$c_1 = \frac{0.25}{30} = 0.0083, c_2 = \frac{0.25}{60} = 0.0042, c_3 = \frac{0.2}{90} = 0.0022, c_4 = \frac{0.15}{180} = 0.0008, c_5 = \frac{0.15}{240} = 0.0006$$

dopo di che si procede al disegno dei rettangoli aventi per base ciascun intervallo e per altezza la densità dell'intervallo.

b) Si vede subito che la **mediana** cade proprio nell'estremo superiore del secondo intervallo (30,90], cioè $med(X) = 90$. Ciò si ottiene ovviamente anche (errori di arrotondamento a parte) con il solito procedimento:

$$Fr\{X \le q_{0.5}\} = \boxed{0.25 + (q_{0.5} - 30) \times 0.0042 = 0.05} \text{ da cui}$$

$$med(X) = q_{0.5} = 30 + \frac{0.5 - 0.25}{0.0042} = 30 + 59.5238 = 89.5238 \cong 90$$

(**Nota bene**: Si poteva considerare 90 come l'estremo inferiore del **terzo** intervallo ed ottenere, mutatis mutandis, lo stesso risultato (in questo caso il solito procedimento dà esattamente 90 senza errori di arrotondamento). Ciò perché, come si sa, nel caso continuo includere od escludere l'estremo di un intervallo non fa cambiare alcunché).

L'**intervallo modale** è il primo intervallo [0,30], allora la **moda** è: $mod(X) = \frac{0+30}{2} = 15$

La **media** si ottiene passando alla variabile discretizzata X':

$$X' = \begin{cases} 15 & 60 & 135 & 270 & 480 \\ 0.25 & 0.25 & 0.2 & 0.15 & 0.15 \end{cases} \text{ da cui si ottiene}$$

$$M(X) = M(X') = 3.75 + 15 + 27 + 40.5 + 72 = 158.25$$

c) **Nota bene**: "X differisce da 158.25 per meno di 50 minuti", ovvero:
$158.25 - X \le 50$, ed anche: $X - 158.25 \le 50$, che insieme danno: $158.25 - 50 \le X \le 158.25 + 50$,
e dunque la percentuale o frequenza relativa richiesta è:

$$Fr\{158.25 - 50 \le X \le 158.25 + 50\} = Fr\{108.25 \le X \le 208.25\} =$$
$$= Fr\{108.25 \le X \le 180\} + Fr\{180 < X \le 208.25\} =$$
$$= (180 - 108.25) \times 0.0022 + (208.25 - 180) \times 0.0008 =$$
$$= 71.75 \times 0.0022 + 28.25 \times 0.0008 = 0.1578 + 0.0226 = 0.1804$$

ESERCIZIO 2 (punti 5). Il reddito di un individuo scelto a caso da un collettivo ha distribuzione di probabilità con la seguente funzione di densità:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x - \frac{1}{36}x^2 & x \in (0,6) \\ 0 & altrove \end{cases}.$$

a) Si verifichi che effettivamente f è una funzione di densità.
b) Si calcoli la probabilità che l'individuo abbia reddito compreso tra 3 e 10.
c) Si calcoli il valore atteso del reddito dell'individuo.

a) si deve avere (1) $f(x)\ge 0 \quad \forall x\in(-\infty,\infty)$, inoltre (2) si deve verificare che $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$, verifichiamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_0^6\left(\frac{1}{6}x-\frac{1}{36}x^2\right)dx = \int_0^6 \frac{1}{6}xdx - \int_0^6 \frac{1}{36}x^2dx = \frac{1}{6}\frac{6^2}{2}-\frac{1}{36}\frac{6^3}{3} = 3-2=1$$

b) $P(3\le X\le 10) = P(3\le X\le 6) = 1-P(0\le X<3) = = 1-\int_0^3\left(\frac{1}{6}x-\frac{1}{36}x^2\right)dx =$

$$=1-\left(\int_0^3 \frac{1}{6}xdx-\int_0^3\frac{1}{36}x^2dx=\right)=1-\left(\frac{1}{6}\frac{3^2}{2}-\frac{1}{36}\frac{3^3}{3}\right)=1-(0.75-0.25)=1-0.5=0.5$$

Ovviamente, invece di $1-P(0\le X<3)$, si poteva calcolare direttamente $P(3\le X\le 6)$ che però è un calcolo un poco più lungo.

c) $E(X)=\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx =$

$$=\int_0^6 x\left(\frac{1}{6}x-\frac{1}{36}x^2\right)dx = \int_0^6\frac{1}{6}x^2dx-\int_0^6\frac{1}{36}x^3dx = \frac{1}{6}\frac{6^3}{3}-\frac{1}{36}\frac{6^4}{4} = \frac{6^2}{3}-\frac{6^2}{4} = 12-9=3$$

ESERCIZIO 3 (punti 5) Un investitore acquista all'inizio dell'anno 1000 azioni di un certo titolo; il prezzo d'acquisto di ciascuno azione è pari a 10. Il rendimento annuo del titolo dall'inizio alla fine dell'ano è una variabile aleatoria *R* con distribuzione normale, valore atteso 0.06 e scarto quadratico medio (volatilità) 0.02.
a) Si calcoli la probabilità che il rendimento del titolo sia minore di 0.08.
b) Si calcoli la probabilità che il prezzo del titolo al termine dell'anno sia maggiore di 11.
c) Si calcoli la probabilità che il valore complessivo *Y* delle azioni acquistate all'inizio dell'anno sia, a fine anno, non inferiore a 10500.

a) $P(R\le 0.08) = P\left(Z\le\frac{0.08-0.06}{0.02}\right) = P\left(Z\le\frac{0.02}{0.02}\right) = P(Z\le 1) = 0.8413$

b)

$$P(S\ge 11) = P(s_0e^R\ge 11) = P\left(e^R\ge\frac{11}{s_0}\right) = P\left(R\ge \ln\frac{11}{s_0}\right) = P\left(Z\ge\frac{\ln 1.1-0.06}{0.02}\right) = P\left(Z\ge\frac{0.0953-0.06}{0.02}\right) =$$

$$=P\left(Z\ge\frac{0.0353}{0.02}\right) = P(Z\ge 1.765) = P(Z\ge 1.76) = 1-P(Z<1.76) = 1-0.9608 = 0.0392$$

c)

$$P(1000\times S\ge 10500) = P\left(s_0e^R\ge\frac{10500}{1000}=10.5\right) = P(e^R\ge 1.05) = P(R\ge \ln 1.05) = P\left(Z\ge\frac{\ln 1.05-0.06}{0.02}\right) =$$

$$=P\left(Z\ge\frac{0.0488-0.06}{0.02}\right) = P\left(Z\ge\frac{-0.0112}{0.02}\right) = P(Z\ge -0.56) = P(Z<0.56) = 0.7123$$

ESERCIZIO 4 (punti 6). Le scatole di graffette prodotte da un'azienda hanno un numero di graffette distribuite in accordo alla seguente funzione di probabilità:

num. Graf.	47	48	49	50	51	52	53
probabilità	0.14	0.13	0.21	0.29	0.10	0.10	0.03

a) Si descriva, mediante un opportuno grafico, la distribuzione di probabilità del numero di graffette per scatola.
b) Si calcoli la probabilità che una scatola contenga non meno di 50 graffette e non più di 52.
c) Si calcoli il numero medio atteso di graffette per scatola.
d) Il costo di produzione Y di una scatola di graffette è somma di una parte costante, pari a 12 più una parte dipendente dal numero di graffette X, pari a 2X. Dopo aver espresso la variabile aleatoria Y in funzione di X, si determini il costo medio atteso di produzione e la varianza di detto costo.

a) la rappresentazione grafica richiesta è data dal diagramma ad aste che si ottiene indicando sull'asse delle ascisse i valori della variabile e sull'asse delle ordinate le probabilità di detti valori.

b) Nota bene: "meno di 50" = "$X<50$", "**non** $X<50$" = "$X\ge 50$"

"più di 52" = "$X>52$", "**non** $X>52$" = "$X\le 52$", dunque la probabilità richiesta è:

$$P(50\le X\le 52) = p_X(50)+p_X(51)+p_X(52) = 0.29+0.1+0.1 = 0.49$$

c) $E(X) = 6.58+6.24+10.29+14.5+5.1+5.2+1.59 = 49.5$

$E(X^2) = 2452.76,\ V(X) = E(X^2)-E(X)^2 = 2452.76-2450.25 = 2.51$

d) $Y = 12 + 2X$, $E(Y) = 12 + 2 \times 49.5 = 111, V(Y) = 4 \times 2.51 = 10.04$

ESERCIZIO 5 (punti 5). In un punto in cui il segnale di telefonia mobile è scadente, un individuo prova, in una giornata, 5 volte, indipendentemente, a prendere la linea. Si valuta che la probabilità di riuscire a prendere la linea ad ogni tentativo sia pari a 0.4.

a) Si determini, mostrando i principali calcoli effettuati, la probabilità che riesca a prendere la linea almeno 2 volte.

b) Si determini, mostrando i principali calcoli effettuati, la probabilità che riesca a prendere la linea solo la terza volta.

c) Si determini, mostrando i principali calcoli effettuati, il numero atteso di volte in cui riesce a prendere la linea.

a) $X \sim Bi(0.4;5)$, $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \left[\binom{5}{0} 0.4^0 \times 0.6^5 + \binom{5}{1} 0.4^1 \times 0.6^4 \right] =$

$= 1 - (0.6^5 + 5 \times 0.4 \times 0.6^4) = 1 - (0.0778 + 0.2592) = 1 - 0.337 = 0.663$

b) E' richiesta la probabilità di avere, su cinque tentativi, 4 tentativi falliti ed un solo successo (che sia nel terzo tentativo o in un altro **specificato** tentativo non fa cambiare il risultato). Dunque per l'**indipendenza** delle cinque bernoulliane $X_i \sim Bi(0.4)$ ($i = 1, 2, \ldots 5$) la probabilità di osservare 4 "0" ed un solo "1" (al terzo o ad un altro **specificato** tentativo) è data dal prodotto delle probabilità di 4 "0" ed un solo "1":

$0.6^4 \times 0.4^1 = 0.1296 \times 0.4 = 0.0518$

Nota bene: moltiplicando 0.0518 per $\binom{5}{1}$ si ha la probabilità di un solo "1" in totale (su cinque tentativi) **non** in uno **specificato** tentativo, **bensì** in un **qualsiasi** tentativo (cioè indifferentemente **o** al primo, **o** al secondo, **o** al terzo, ecc.). Ciò fa aumentare la probabilità di un solo "1" in totale su cinque tentativi, ed è proprio la probabilità data dalla binomiale $X \sim Bi(0.4;5)$: $\binom{5}{1} 0.4^1 \times 0.6^4 = \binom{5}{1} \times 0.0518 = 5 \times 0.0518 = 0.259 > 0.0518$

c) $E(X) = np = 5 \times 0.4 = 2$

ESERCIZIO 6 (punti 3) Il valore di un portafoglio azionario ha, in un certo intervallo di tempo, un incremento (in senso esteso, positivo o negativo) distribuito in accordo ad una normale con valore atteso 0 e scarto quadratico medio 2000. Si determini il VaR di tale portafoglio, assumendo α=0.1.

$X \sim N(0;2000^2)$,

$P(X \geq q) = 1 - 0.1$

$P(X \leq q) = 0.1$

$q = q_{0.1} = -z_{0.9} \times \sigma_X = -1.282 \times 2000 = -2564$

$VaR = 2564$