Università C. Cattaneo, Corso di laurea in Economia Aziendale, A.A. 2004-05 – STATISTICA 2 26.01.06

Cognome: **Nome:** **Matr.:**

NB: **(A)** ai fini della valutazione verranno considerate solo le risposte riportate dallo studente negli appositi riquadri bianchi del testo d'esame. **(B)** nello svolgimento del compito, si utilizzino tre cifre decimali. **(C)** Allo studente/studentessa che consulti foglietti, appunti, libri , ecc o che parli con altri sarà annullata la prova d'esame.

ESERCIZIO 1 (2+1+1 punti) Dato il vettore aleatorio bidimensionale (X, Y) con la seguente distribuzione congiunta

X \ Y	**-1**	**0**	**1**
0	0.20	0	0.32
1	0.10	0.25	0
10	0	0	0.13

a) X e Y sono stocasticamente indipendenti? Motivare la risposta.

No, perché p.es. $P(X=0, Y=-1)=0.2 \neq P(X=0)P(Y=-1)=0.52\times 0.3=0.156$

b) $P(X \le 4, Y \le -0.5) = ?$. Mostrare i calcoli.

$$P(X \le 4, Y \le -0.5) = P(X=0, Y=-1)+P(X=1, Y=-1)=0.2+0.3=0.5$$

c) Scrivere la funzione di probabilità di $S=2Y^2$

$$p_{S=2Y^2}(s)=\begin{cases} 0.25 & s=0 \\ 0.75 & s=2 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

ESERCIZIO 2 (2+2+1 punti) Sia $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ la redditività di un'azienda di un certo settore industriale e siano μ e σ^2 entrambi non noti. Sulla base di un campione rilevato su n=25 aziende del settore, si è ottenuto $\bar{x}_{25}=29$ e $s_c=11$.

a) Con riferimento a quanto sopra scrivere la formula generale dell'intervallo di confidenza per μ con coefficiente di confidenza 1-α.

$$IC_{1-\alpha}(\mu)=\left(\bar{x}_{25}-t_{1-\alpha/2}^{25-1}\hat{\sigma}_{\bar{X}}, \bar{x}_{25}+t_{1-\alpha/2}^{25-1}\hat{\sigma}_{\bar{X}}\right)$$

b) Con riferimento a quanto sopra determinare numericamente l'intervallo di confidenza per μ con coefficiente confidenza 0.99 (Si mostrino i principali risultati intermedi).

$$t_{0.995}^{24}=2.797,\ \hat{\sigma}_{\bar{X}}=11/5=2.2 \Rightarrow t_{1-\alpha/2}^{25-1}\hat{\sigma}_{\bar{X}}=6.1534$$

$$IC_{1-\alpha}(\mu)=(29-6.1534, 29+6.1534)=(22.8466, 35.1534)$$

c) Eseguire il seguente test statistico di $H_0:\mu=27$ contro $H_1:\mu\neq 27$ mediante l'intervallo di confidenza di cui sopra esplicitando il livello di significatività.

$$27 \in IC_{0.99}(\mu) \Rightarrow \text{si accetta } H_0 \text{ al livello di significatività } \alpha=0.01$$

ESERCIZIO 3 (1+2+1+2 punti).

a) Per una popolazione statistica X bernoulliana di parametro p e per n=45,scrivere la regione di rifiuto del seguente test $H_0: p=0.3$ contro $H_1: p=0.7$

$$R_\alpha=\left\{\bar{x}_{45}:\bar{x}_{45}\ge 0.3+z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{0.3\times 0.7}{45}}\right\}$$

b) Dare la definizione generale della probabilità β dell'errore di secondo tipo.

$$\beta=P\left(T_n \notin R_\alpha \middle| H_1\right)$$

c) Per una popolazione statistica X bernoulliana di parametro p non noto ed un campione bernoulliano (X_1, X_2, X_3), si vuole eseguire il test di H_0: p = 0.3 contro H_1: p = 0.7. A tal fine si intende usare una regione di rifiuto R_α tale che $R_\alpha = \left(\sum_{i=1}^{3} X_i \geq 2\right)$. Mostrando i principali passaggi intermedi, determinare α.

$$\alpha = P\left(\sum_{i=1}^{3} X_i \geq 2 \middle| H_0\right) = \binom{3}{2} 0.3^2 0.7^{3-2} + \binom{3}{3} 0.3^3 0.7^{3-3} = 0.189 + 0.027 = 0.216 \quad \left(\sum_{i=1}^{3} X_i \sim Bi(0.3;3)\right)$$

d) Per una popolazione statistica $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ con σ^2 non noto si scriva la regione accettazione per il test $H_0 : \mu \geq \mu_0$ contro $H_1 : \mu < \mu_0$ con α =0.01 ed n=20.

$$A_{0.01} = \left\{ \bar{x}_{20} : \bar{x}_{20} \geq 0.3 - t_{0.99}^{19} \sqrt{\frac{s_c^2}{20}} \right\}$$

ESERCIZIO 4 (**2+2 punti**) Per uno stimatore T di un parametro θ:

a) scrivere la scomposizione dell'errore quadratico medio

$$EQM_\theta(T_n) = V(T_n) + \left(E(T_n) - \theta\right)^2$$

b) la definizione di consistenza

$$\lim_{n\to\infty} EQM_\theta(T_n) = 0, \text{ ovvero}$$

$$a) \lim_{n\to\infty} E(T_n) - \theta = 0, b) \lim_{n\to\infty} V(T_n) = 0$$

ESERCIZIO 5 (**2+2+1** punti) Sia X una popolazione statistica con valore atteso μ_X e varianza σ_X^2 e sia (X_1, X_2, X_3, X_4) il corrispondente campione casuale semplice di ampiezza $n = 4$. Al fine di stimare μ_X si consideri il seguente stimatore: $T(X_1, X_2, X_3, X_4) = \dfrac{3X_1 - X_2 + 4X_3 + X_4}{7}$

a) Verificare se T sia non distorto o meno per il parametro μ_X

$$E(T) = \frac{7\mu_X}{7} = \mu_X \Rightarrow T \text{ è non distorto per } \mu_X$$

b) Determinare la varianza di T

$$V(T) = \frac{25\sigma_X^2}{7}$$

c) Determinare l'errore quadratico medio di T

$$EQM_{\mu_X}(T) = V(T) + \left(E(T) - \mu_X\right)^2 = \frac{25\sigma_X^2}{7}$$

ESERCIZIO 6 (**3 punti**) Scrivere le ipotesi deboli del modello di regressione lineare

$$E(\varepsilon_i) = 0, V(\varepsilon_i) = \sigma^2, Cov\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j\right) = 0 \quad \left(i, j = 1,...n,\ i \neq j\right)$$

ESERCIZIO 7 (**3 punti**) Per analizzare la dipendenza lineare del fatturato Y dal budget pubblicitario X si sono considerate le coppie budget pubblicitario-fatturato (x_i, y_i) che si sono osservate negli ultimi sei mesi $(i = 1, 2, ...6)$ e si è ottenendo il tabulato SPSS qui riportato a pag. 4. Sulla base del **solo** tabulato SPSS: **a) (1 punti)** scrivere le stime puntuali dei due parametri β_0 e β_1 della retta di regressione, **b) (1 punti)** scrivere la stima per intervallo di confidenza di β_1 con coefficiente confidenza 0.95, **c) (1 punti)** eseguire il test di $H_0 : \beta_1 = 0$ contro $H_1 : \beta_1 \neq 0$ al livello di significatività 0.05 giustificando la decisione presa.

a) beta zero = -0.688, beta uno=1,208
b) IC=**(0.104, 2.311)**
c) si rifiuta acca con zero perché 0 non appartiene ad IC.

Regressione

Riepilogo del modello

Modello	R	R-quadrato	R-quadrato corretto	Errore std. della stima
1	,835[a]	,698	,622	,59904

a. Stimatori: (Costante), X

ANOVA[b]

Modello		Somma dei quadrati	df	Media dei quadrati	F	Sig.
1	Regressione	3,313	1	3,313	9,233	,038[a]
	Residuo	1,435	4	,359		
	Totale	4,749	5			

a. Stimatori: (Costante), X

b. Variabile dipendente: Y

Coefficienti[a]

Modello		Coefficienti non standardizzati		Coefficienti standardizzati	t	Sig.	Intervallo di confidenza per B al 95%	
		B	Errore std.	Beta			Limite inferiore	Limite superiore
1	(Costante)	-,688	1,214		-,567	,601	-4,058	2,682
	X	1,208	,397	,835	3,039	,038	,104	2,311

a. Variabile dipendente: Y