STATISTICA INFERENZIALE (III): TEST STATISTICI, ovvero VERIFICA DELLE IPOTESI STATISTICHE

[15]

UN'IPOTESI STATISTICA **PARAMETRICA**

è un'**ipotesi sul valore di un parametro** di una popolazione statistica X

Esempi: $H:\mu_X = 5.4,\ H:\mu_X \neq 4.8,\ H:\mu_X \leq 6.4,\ ecc.$

(dove H è la lettera iniziale di "*Hypothesis*")

[16]

IPOTESI STATISTICHE PARAMETRICHE $\begin{cases} \text{IPOTESI NULLA: } H_0 \\ \text{IPOTESI ALTERNATIVA: } H_1 \end{cases}$

L'IPOTESI NULLA H_0

è l'ipotesi che rappresenta **le nostre conoscenze sul valore del parametro**

quindi

H_0 **si ASSUME VERA fino a PROVA CONTRARIA**

Esempio a) $H_0:\mu_X \leq 6.4$, ovvero $H_0:\mu_X \in (-\infty, 6.4]$

Esempio b) $H_0:\mu_X = 5.7$, ovvero $H_0:\mu_X \in \{5.7\}$

(le nostre conoscenze sul valore del parametro possono derivare da risultati di tipo teorico o di tipo empirico)

L'IPOTESI ALTERNATIVA H_1

è la negazione logica, ovvero l'insieme complementare, di H_0

Esempio a) $H_1:\mu_X > 6.4$, ovvero $H_1:\mu_X \in (6.4, \infty)$

Esempio b) $H_1:\mu_X \neq 5.7$, ovvero $H_1:\mu_X \in (-\infty, 5.7) \cup (5.7, \infty)$

[17]

IL TEST STATISTICO DI H_0 CONTRO H_1

è **la verifica empirica o sperimentale**, cioè basata su $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, **dell'ipotesi** H_0

è **la verifica campionaria dell'ipotesi** H_0

IL TEST STATISTICO sulla base di una realizzazione campionaria $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ } decide {
- o di **rifiutare** H_0, allora le nostre conoscenze sul parametro vanno modificate e qualche **nuova azione** va messa in atto
- o di **non rifiutare** H_0 (= "accettare" H_0), allora si lascia tutto com'è e **non si fa NULLA**

[18]

H_0 si dice IPOTESI **NULLA**

perché

se il test statistico decide di **non rifiutare** l'ipotesi H_0

allora non modifichiamo le nostre conoscenze, e quindi **non si fa NULLA**

[19]

LA DECISIONE DI UN TEST STATISTICO si basa sul **CAMPIONAMENTO**

conseguenza:

LA DECISIONE DI UN TEST STATISTICO può essere affetta da **ERRORE**

l'errore considerato più grave è detto

ERRORE DI 1° TIPO = RIFIUTARE H_0 **QUANDO E' VERA**

RIFIUTARE H_0 QUANDO E' VERA = **FALSO ALLARME**

$\alpha =$ probabilità che il test **commetta** errore di 1° tipo

$\alpha = 0.01,\ 0.05,\ \text{ecc.}$, α **può essere fissata da noi molto piccola**

$$1-\alpha = 0.99,\ 0.95,\ \text{ecc.}, = \begin{cases} \text{prob. che il test } \textbf{non} \text{ commetta } \textbf{errore di 1° tipo} \\ \text{prob. che il test } \textbf{non} \text{ rifiuti } H_0 \textbf{ quando è vera} \end{cases}$$

$\alpha =$ misura del rischio che accettiamo di commettere errore di 1° tipo

$\alpha =$ **livello di significatività del test**

[20]

Data una popolazione statistica X, un campione statistico $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

$$\text{con } n \geq 30 \ \Rightarrow\ \overline{X}_n \sim N\left(\mu_X; \frac{\sigma_X^2}{n}\right), \text{ e con } \Delta_\alpha = \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}}\, z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

LE 3 REGOLE $(a),(b),(c)$ PER EFFETTUARE IL TEST DI

$H_0 : \mu_X = \mu_0$ contro $H_1 : \mu_X \neq \mu_0$

al livello di significatività α

$$(a)\ H_0 : \mu_X = \mu_0 \Rightarrow \overline{X}_n \sim N\left(\mu_0; \frac{\sigma_X^2}{n}\right) \ (\overline{X}_n \text{ Statistica test})$$

(b) Quando non si rifiuta (= si "accetta") H_0 **?** (c) Quando si rifiuta H_0 **?**

[21]

(b): **NON SI RIFIUTA** (= si "accetta") H_0 se $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dà un $\overline{x}_n$ tale che

$\boxed{\mu_0 - \Delta_\alpha < \overline{x}_n < \mu_0 + \Delta_\alpha}$, ovvero

$$\boxed{\overline{x}_n \in (\mu_0 - \Delta_\alpha, \mu_0 + \Delta_\alpha) = A_\alpha = \textbf{REGIONE DI ACCETTAZIONE}}$$

$$\left(P\left(\mu_0 - \Delta_\alpha < \overline{X}_n < \mu_0 - \Delta_\alpha\right) = 1-\alpha = \begin{cases} \text{prob. di non rifiutare } H_0 \text{ quando è vera} \\ \text{prob. di non commettere errore di 1° tipo} \end{cases} \right)$$

(c): **SI RIFIUTA** H_0 se $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dà un $\overline{x}_n$ tale che

$\boxed{\overline{x}_n \leq \mu_0 - \Delta_\alpha \quad \text{oppure} \quad \overline{x}_n \geq \mu_0 + \Delta_\alpha}$, ovvero

$$\boxed{\overline{x}_n \in (-\infty, \mu_0 - \Delta_\alpha] \cup [\mu_0 + \Delta_\alpha, \infty) = R_\alpha = \textbf{REGIONE DI RIFIUTO}}$$

$$\left(P\left(\overline{X}_n \leq \mu_0 - \Delta_\alpha\right) + P\left(\overline{X}_n \geq \mu_0 + \Delta_\alpha\right) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha \begin{cases} \text{prob. di rifiutare } H_0 \text{ quando è vera} \\ \text{prob. di commettere errore di 1° tipo} \end{cases} \right)$$

N.B. Rispondere alla domanda (6) dell'Es. nei riquadri [8] e [23] (la risposta è nel riquadro [23bis])

ERRORE DI 1° TIPO ed ERRORE DI 2° TIPO [22]

Sulla base del riquadro [21] la probabilità α dell'errore di 1° tipo si scrive come segue

$$\alpha = P\left(\bar{X}_n \in R_\alpha \middle| H_0\right) = P\left(\bar{X}_n \notin A_\alpha \middle| H_0\right)$$

dove "$|H_0$" vuol dire "quando H_0 è vera"

La decisione di un test statistico può essere affetta da un **2° tipo di errore**:

ERRORE DI 2° TIPO = **NON RIFIUTARE H_0 QUANDO E' FALSA**

NON RIFIUTARE H_0 QUANDO E' FALSA = **MANCATO ALLARME**

E' facile mostrare che non si possono minimizzare entrambe le probabilità di errore (se si abbassa α aumenta β e viceversa). A questo riguardo, la **regola di decisione nel riquadro [21]** è caratterizzata dal fatto che, a parità di ogni prefissato valore di α, il corrispondente valore di β **è il più piccolo fra quelli che si hanno con regole di decisione differenti.**

[23]

Ripresa e continuazione dell'Esercizio nel riquadro [8].

(6) Infine, sulla base della realizzazione campionaria osservata, si esegua test statistico bilaterale per il reddito medio atteso μ_X : $H_0 : \mu_X = 43.5$ contro $H_1 : \mu_X \neq 43.5$ al livello di significatività $\alpha = 0.05$

[23bis]

RISPOSTA ALLA DOMANDA (6).

DATI: gli stessi della risposta alla domanda (5), vedi riquadro [14bis], più: $\boxed{\mu_0 = 43.5}$

CALCOLI: $\alpha = 0.05$, $\alpha/2 = 0.025$, $\boxed{1-\alpha/2 = 0.975}$, $\boxed{z_{0.975} = 1.96}$.

Determiniamo $A_{0.05}$ prima con la stima puntuale $\hat{\sigma}_X^2 = s_{81}^2 = 546.6667$ e poi con la stima puntuale $\hat{\sigma}_X^2 = s_c^2 = 553.5000$.

Con la stima puntuale $\hat{\sigma}_X^2 = s_{81}^2$ si ottiene:

$$\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n}} = \sqrt{\frac{s_{81}^2}{81}} = \sqrt{\frac{546.6667}{81}} = \sqrt{6.749} = 2.5979 \Rightarrow \boxed{\Delta_{0.05}} = 2.5979 \times 1.96 = \boxed{5.0919}$$

$$\boxed{A_{0.05} =} \left(\mu_0 - \Delta_\alpha, \mu_0 + \Delta_\alpha\right) = \left(43.5 - 5.0919, 43.5 + 5.0919\right) \boxed{= \left(38.4081, 48.5919\right)}$$

Infine, poiché $\hat{\mu}_X = \bar{x}_{81} = 41$ (vedi risposta a domanda (3a), riquadro [8bis]), allora:

$$\boxed{\bar{x}_{81} = 41 \in A_{0.05} : \text{non si rifiuta } H_0}$$

Con la stima puntuale $\hat{\sigma}_X^2 = s_c^2$ si ottiene

$$\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_X^2}{n}} = \sqrt{\frac{s_c^2}{81}} = \sqrt{\frac{553.500}{81}} = \sqrt{6.8333} = 2.6140 \Rightarrow \boxed{\Delta_{0.05}} = 2.6140 \times 1.96 = \boxed{5.1234}$$

$$\boxed{A_{0.05} =} \left(\mu_0 - \Delta_\alpha, \mu_0 + \Delta_\alpha\right) = \left(43.5 - 5.1234, 43.5 + 5.1234\right) \boxed{= \left(38.3766, 48.6234\right)}$$

Infine, poiché $\hat{\mu}_X = \bar{x}_{81} = 41$ (vedi risposta a domanda (3a), riquadro [8bis]), allora:

$$\boxed{\bar{x}_{81} = 41 \in A_{0.05} : \text{non si rifiuta } H_0}$$