Un' applicazione in finanza dei quantili della gaussiana: il Value at Risk o VaR.

ESERCIZIO 1. Sapendo che X è l'incremento aleatorio (= profitto, quando X è positivo; = perdita, quando X è negativo) del valore di un'attività finanziaria dal tempo $t-1$ al tempo t, si dica cosa indica la seguente formula

$$P(X \geq q) = 1 - \alpha \qquad (1)$$

distinguendo il caso **(A)**: $q > 0$, ed il caso **(B)**: $q < 0$.

Risposta.

(A) Con $q > 0$ nella formula (1) si ha $X \geq q > 0$. Dunque con $q > 0$ la (1) indica che con probabilità $1-\alpha$, l'attività finanziaria considerata può dare **come minimo un profitto** $q > 0$.

(B) Con $q < 0$ nella formula (1) si ha $X \geq q(<0)$. Dunque con $q < 0$ la (1) indica che con probabilità $1-\alpha$, l'attività finanziaria considerata può dare **al massimo una perdita** $q < 0$ ■

Nota bene: quando α è una probabilità prefissata molto piccola, p. es. $\alpha = 0.1,\ 0.05$, ecc. (in modo che $1-\alpha$ sia molto alta) la perdita massima $q < 0$ di cui al punto (B) dell'Esercizio 1, considerata positiva, cioè $-q > 0$, è detta in finanza **Value at Risk** (o **VaR** per brevità) dell'attività finanziaria considerata, cioè si ha:

$$P(X \geq q) = 1 - \alpha \ (q < 0) \ \Rightarrow \boxed{\boxed{VaR = -q}}$$

Un esercizio, come quello qui sotto, che richieda di "Determinare il VaR" di un'attività finanziaria, richiede di determinare tale perdita massima $q < 0$ e poi di porre $VaR = -q$. In particolare si dimostra (come risulta dall'Esercizio n. 2 qui sotto) che:

(I) $q = q_\alpha$ e quindi $\boxed{\boxed{VaR = -q_\alpha}}$ dove q_α è il quantile di ordine α della variabile aleatoria X cioè tale che:

$P(X \leq q_\alpha) = \alpha$

(II) se $X \sim N(0;\sigma^2)$, allora: $q_\alpha = -z_{1-\alpha} \times \sigma$ e quindi $\boxed{\boxed{VaR = -q_\alpha = z_{1-\alpha} \times \sigma}}$

ESERCIZIO 2. Sia $X \sim N(0;300000^2)$ l'incremento aleatorio (= profitto, quando X è positivo; = perdita, quando X è negativo) di un'attività finanziaria dal tempo $t-1$ al tempo t. Determinare il VaR dell'attività finanziaria considerata con $\alpha = 0.01$

Risposta. Si deve determinare $q < 0$ tale che

$$P(X \geq q) = 1 - \alpha = 0.99 \ (q < 0)$$

Poiché q lascia alla sua destra esattamente una probabilità pari a $1-\alpha = 0.99$, allora q lascia alla sua sinistra esattamente una probabilità pari ad $\alpha = 0.01$, cioè:

$$P(X \leq q) = 0.01 \ (q < 0) \ \Rightarrow q = q_{0.01} < 0$$

ovvero q è il quantile di ordine $\alpha = 0.01$ di $X \sim N(0;300000^2)$. Per determinare tale quantile bisogna standardizzare $X \sim N(0;300000^2)$ in modo da poter usare le tavole della $Z \sim N(0;1)$:

$$P(X \leq q_{0.01}) = P\left(N(0;1) \leq \frac{q_{0.01} - 0}{300000}\right) = 0.01 \ (q_{0.01} < 0)$$

in cui, essendo $q_{0.01} < 0$, si può porre (vedi (2) a sinistra) ed ottenere (vedi (2) a destra)

$$\boxed{\frac{q_{0.01} - 0}{300000} = -z} \ (z > 0) \ \Rightarrow \ P(N(0;1) \leq -z) = 0.01 \qquad (2)$$

da cui, utilizzando la simmetria della gaussiana standardizzata rispetto all'asse delle ordinate, si ottiene

$$P(N(0;1) \leq -z) = 0.01 \Rightarrow 1 - P(N(0;1) \leq z) = 0.01 \Rightarrow P(N(0;1) \leq z) = 0.99$$

che tramite le tavole di $Z \sim N(0;1)$ dà $z = z_{0.99} = 2.33$ e con la e la (2) dà anche

$$\boxed{\frac{q_{0.01} - 0}{300000} = -2.33} \Rightarrow q_{0.01} = -2.33 \times 300000$$

$$\Rightarrow \boxed{Var = -q_{0.01} = -(-2.33 \times 300000) = 699000 \text{ dollari}} \ ■$$