VARIABILI ALEATORIE: SIMBOLOGIA, DEFINIZIONI, PROPRIETA'

VARIABILI ALEATORIE (v.a.) DISCRETE

Simbologia per la v.a. discreta X: $X = \begin{cases} x_i & i = 1\ldots n \ \left(x_i < x_{i+1}\right) \\ p_X\left(x_i\right) = P\left(X = x_i\right) = p_i > 0 & \left(\sum_{i=1}^{n} p_i = 1\right) \end{cases}$

$S_X = \{x_1, x_2 \ldots x_n\}$ = insieme dei valori possibili della v.a. X è un insieme di valori **isolati**. S_X è tale che

$$P\left(S_X\right) = P\left(\{x_1, x_2 \ldots x_n\}\right) = P\left(x_1 \le X \le x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 = P\left(-\infty < X < \infty\right) = P\left(\mathbb{R}\right) \quad \left(\mathbb{R} = \left(-\infty, \infty\right)\right)$$

Funzione di probabilità della v.a. discreta X:

$$p_i\left(x\right) = \begin{cases} p_i & x = x_i \ \left(i = 1, 2, \ldots n\right) \\ 0 & altrove \end{cases}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITA' DEGLI EVENTI ALEATORI PER LE v.a. DISCRETE

$\boxed{P\left(A\right), A \subseteq \mathbb{R} = \left(-\infty, \infty\right)}$:

Definizione di: $P\left(A\right) =$ probabilità con cui la v.a. X assume **in una osservazione** un **qualsiasi** valore reale x **che soddisfa la condizione** di appartenere ad A, ovvero tale che $x \in A$

Calcolo di: $P\left(A\right) =$ **SOMMA** delle probabilità p_i dei valori possibili x_i **che soddisfano la condizione** di appartenere ad A, ovvero tali che $x_i \in A$.

(I)

$\boxed{P\left(X < b\right), P\left(X \le b\right)}$:

Definizione di: $P\left(X < b\right)$ [e $P\left(X \le b\right)$] = probabilità con cui la v.a. X assume **in una osservazione** un **qualsiasi** valore reale x **che soddisfa la condizione** data dalla disuguaglianza indicata tra parentesi, cioè $x < b$ [$x \le b$].

Calcolo di: $P\left(X < b\right)$ [e $P\left(X \le b\right)$]= **SOMMA** delle probabilità p_i dei valori possibili x_i **che soddisfano la condizione** data dalla disuguaglianza indicata tra parentesi, cioè $x_i < b$ [$x_i \le b$].

(II)

$\boxed{(1)P\left(a < X \le b\right), (2)P\left(a \le X \le b\right), (3)P\left(a \le X < b\right), (4)P\left(a \le X < b\right)}$:

Definizione di: $(1), (2), (3), (4)$ = probabilità con cui la v.a. X assume **in una osservazione** un **qualsiasi** valore reale x **che soddisfa la condizione** data dalla disuguaglianza indicata tra parentesi, cioè: (1) $a < x \le b$, (2) $a \le x \le b$, ecc.

Calcolo di: $(1), (2), (3), (4)$ = **SOMMA** delle probabilità p_i dei valori possibili x_i **che soddisfano la condizione** data dalla disuguaglianza indicata tra parentesi, cioè: (1) $a < x_i \le b$, (2) $a \le x_i \le b$, ecc.. Inoltre si ha che:

$(1)P\left(a < X \le b\right) = P\left(X \le b\right) - P\left(a \le X\right)$

$(2)P\left(a \le X \le b\right) = P\left(X \le b\right) - P\left(a < X\right)$

$(3)P\left(a < X < b\right) = P\left(X < b\right) - P\left(a \le X\right)$

$(4)P\left(a \le X < b\right) = P\left(X < b\right) - P\left(a < X\right)$

(III)

$\boxed{P(X > a), P(X \geq a)}$:

<u>Definizione di:</u> $P(X > a)$ [e $P(X \geq a)$] = probabilità con cui la v.a. X assume **in una osservazione** un **qualsiasi** valore reale x **che soddisfa la condizione** data dalla disuguaglianza indicata tra parentesi, cioè $x > a$ [$x \geq a$]

<u>Calcolo di:</u> $P(X > a)$ [e $P(X \geq a)$] = **SOMMA** delle probabilità p_i dei valori possibili x_i **che soddisfano la disuguaglianza** indicata tra parentesi, cioè $x_i > a$ [$x_i \geq a$]. Inoltre si ha che

$$P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$$

$$P(X \geq a) = 1 - P(X < a)$$

NOTA BENE: in **(I)**, **(II)** e **(III)** sopra la presenza o l'assenza dell'uguale "=" **può** far cambiare il valore della probabilità, e precisamente **fa cambiare** il valore della probabilità tutte e sole le volte che l'estremo *a* (oppure *b*) è uno dei valori possibili della v.a. *X*.

QUANTILE DI ORDINE $\alpha \in (0,1)$ di una v.a. discreta

$q_\alpha =$ quantile di ordine α: è il più piccolo valore possibile della v.a. X che verifica la condizione:

$P(X \leq q_\alpha) \geq \alpha$.

VALORE MEDIO ATTESO, o MEDIA, o MOMENTO PRIMO di una v.a. discreta

$$E(X) = \mu_X = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Proprietà di $E(X)$:

(1) internalità: $\min S_X \leq E(X) \leq \max S_X$

(2) consistenza: $E(X) = c$ per la v.a. degenere $X = \begin{cases} c \\ p_X(c) = 1 \end{cases}$ $(S_X = \{c\},\ \text{parametro } c \in \mathbb{R})$

MOMENTO SECONDO di una v.a. discreta

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$$

VARIANZA e SCARTO QUADRATICO MEDIO di una v.a. discreta

$$V(X) = \sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - \mu_X]^2 p_i = E(X^2) - E(X)^2$$

$$s.q.m.(X) = \sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

Proprietà di $V(X)$ (e $s.q.m.(X)$):

(1) non negatività: $\sigma_X^2 \geq 0$ $(\sigma_X \geq 0)$

(2) $\sigma_X^2 = 0$ $(\sigma_X = 0)$ se e solo se X è una v.a. degenere $X = \begin{cases} c \\ p_X(c) = 1 \end{cases}$ $(S_X = \{c\},\ \text{parametro } c \in \mathbb{R})$

(3) $V(X) = E(X^2)$ se e solo se $E(X) = 0$

v.a. DISCRETE NOTEVOLI

v.a. DEGENERE

Tipico significato applicativo dell'unico valore possibile $c \in \mathbb{R}$ della v.a. degenere: serve per avere anche nel calcolo delle probabilità la nozione di "costante" come in matematica.

Simbologia: $X = \begin{cases} c \\ p_X(c) = 1 \end{cases}$, $(S_X = \{c\},\ \text{parametro } c \in \mathbb{R})$

Funzione di probabilità: $p(x) = \begin{cases} 1 & x = c \\ 0 & altrove \end{cases}$

$E(X) = \mu_X = c$, $V(X) = \sigma_X^2 = 0$

v.a. BERNOULLIANA

Tipico significato applicativo dei due valori possibili [$x = 0,1$] della v.a. bernoulliana:
x = numero totale delle volte che un dato evento *A* può verificarsi in **una** osservazione (con p probabilità che si verifichi).

Simbologia: $X \sim Be(p)$ $\left(\text{parametro } p \in (0,1)\right)$, $S_X = \{0,1\}$, $X = \begin{cases} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{cases}$

Funzione di probabilità: $p(x) = \begin{cases} 1-p & x = 0 \\ p & x = 1 \\ 0 & altrove \end{cases}$

$E(X) = \mu_X = p$, $V(X) = \sigma_X^2 = p(1-p)$

v.a UNIFORME DISCRETA

Simbologia: $X \sim U(n)$ $\left(\text{prametro } n \text{ intero positivo}\right)$, $S_X = \{1,2,...n\}$, $X = \begin{cases} x = 1,2,...n \\ p(x) = \dfrac{1}{n} \end{cases}$

Funzione di probabilità: $p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & x = 1,2,...n \\ 0 & altrove \end{cases}$

$E(X) = \mu_X = \dfrac{1+n}{2}$, $V(X) = \sigma_X^2 = \dfrac{n^2-1}{12}$

v.a. BINOMIALE

Tipico significato applicativo dei valori possibili [$x = 0,1,\ldots n$] della v.a. binomiale:
x = numero totale delle volte che un dato evento *A* può verificarsi in ***n*** osservazioni (con p probabilità **costante** che *A* si verifichi in una qualsiasi osservazione).

Simbologia: $X \sim Bi(p;n)$ $\left(\text{parametri: } p \in (0,1),\ n \text{ intero positivo}\right)$, $S_X = \{0,1,\ldots n\}$

Funzione di probabilità: $p(x) = \begin{cases} \dbinom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0,1,\ldots n \\ 0 & altrove \end{cases}$

Dove $\dbinom{n}{x} = \dfrac{n!}{x!(n-x)!} = \dfrac{1\times 2\times\ldots\times n}{(1\times 2\times\ldots\times x)\times\left(1\times 2\times\ldots\times(n-x)\right)}$; $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n} = 1$; $0! = 1$

$E(X) = \mu_X = np$, $V(X) = \sigma_X^2 = np(1-p)$

VARIABILI ALEATORIE (v.a.) CONTINUE

Definizione di **v.a. continua:**

Una v.a. *X* è continua se e solo se i suoi valori possibili x sono tutti i numeri reali di un intervallo (finito o infinito) di $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ (ovvero una v.a. *X* è continua se e solo se l'insieme S_X dei suoi valori possibili x è un intervallo (finito o infinito) di numeri reali) ed inoltre **per ciascuno dei valori possibili** x è definita una **funzione di densità di probabilità** $f_X(x)$ (vedi definizione qui sotto).

Definizione di **funzione di densità di probabilità** $f_X(x)$ di una v.a. continua:

Una funzione $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione di densità di probabilità di una v.a. continua se ha le seguenti tre proprietà:

(1) non negatività su $\mathbb{R}$ e positività su S_X, ovvero:

$f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, e $f_X(x) > 0 \quad \forall x \in S_X$

(2) normalizzazione (dell'area sottesa con l'asse delle ascisse), ovvero

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

(3) $P(X \leq b)$ = **AREA** sottesa dalla funzione di densità con l'asse delle ascisse da $-\infty$ fino ad *b*, ovvero:

$$P(X < b) = P(X \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\,dx$$

dove $P(X < b)$=$P(X \leq b)$ = probabilità con cui la v.a. *X* assume **in una osservazione** un **qualsiasi** valore reale x **che soddisfa la condizione** data dalla disuguaglianza indicata tra parentesi, cioè $x < b$ [$x \leq b$] (dove, a differenza delle v.a. discrete, la presenza o l'assenza dell'uguale "=" **non** fa cambiare i valori delle aree e quindi le probabilità).

CALCOLO DELLE PROBABILITA' DEGLI EVENTI ALEATORI PER LE v.a. CONTINUE

(I)

$\boxed{(1)P(a < X \leq b),(2)P(a \leq X \leq b),(3)P(a \leq X < b),(4)P(a \leq X < b)}$:

Definizione di: $(1),(2),(3),(4)$ = probabilità con cui la v.a. *X* assume **in una osservazione** un **qualsiasi** valore reale x **che soddisfa la condizione** data dalla disuguaglianza indicata tra parentesi, cioè: (1) $a < x \leq b$, (2) $a \leq x \leq b$, ecc.

Calcolo di $(1),(2),(3),(4)$ = **AREA** sottesa dalla funzione di densità con l'asse delle ascisse da *a* a *b*, ovvero:

$$P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X < b) = \int_{a}^{b} f_X(x)dx$$

dove la presenza o l'assenza dell'uguale "=" **non** fa cambiare i valori delle aree e quindi le probabilità. Inoltre si ha, come per le v.a. discrete, che:

$(1)P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(a \leq X)$

$(2)P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(a < X)$

$(3)P(a < X < b) = P(X < b) - P(a \leq X)$

$(4)P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(a < X)$

dove però, a differenza delle v.a. discrete, la presenza o l'assenza dell'uguale "=" **non** fa cambiare i valori delle aree e quindi le probabilità.

(II)

$\boxed{P(X > a), P(X \geq a)}$:

Definizione di: $P(X > a)$ [$P(X \geq a)$] = probabilità con cui la v.a. *X* assume **in una osservazione** un **qualsiasi** valore reale x **che soddisfa la condizione** data dalla disuguaglianza indicata tra parentesi, cioè $x > a$ [$x \geq a$]

Calcolo di: $P(X > a)$ [$P(X \geq a)$] = **AREA** sottesa dalla funzione di densità con l'asse delle ascisse da *a* a ∞, ovvero:

$$P(X > a) = P(X \geq a) = \int_{a}^{\infty} f_X(x)dx$$

Inoltre si ha che

$P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$

$P(X \geq a) = 1 - P(X < a)$

dove, a differenza delle v.a. discrete, la presenza o l'assenza dell'uguale "=" **non** fa cambiare i valori delle aree e quindi le probabilità.

QUANTILE DI ORDINE $\alpha \in (0,1)$ di una v.a. X continua

$q_\alpha =$ quantile di ordine α: è il valore reale tale che

$P(X \le q_\alpha) = \alpha$.

VALORE MEDIO ATTESO, o MEDIA, o MOMENTO PRIMO di una v.a. discreta

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Proprietà di $E(X)$:

(1) internalità: $\min S_X \le E(X) \le \max S_X$

MOMENTO SECONDO di una v.a. discreta

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx$$

VARIANZA e SCARTO QUADRATICO MEDIO di una v.a. discreta

$$V(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 f_X(x) dx = E(X^2) - E(X)^2$$

$$s.q.m.(X) = \sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

Proprietà di $V(X)$ (e $s.q.m.(X)$):

(1) non negatività: $\sigma_X^2 \ge 0$ $(\sigma_X \ge 0)$

(2) $V(X) = E(X^2)$ se e solo se $E(X) = 0$

v.a. CONTINUE NOTEVOLI

v.a UNIFORME CONTINUA

Simbologia: $X \sim U(a,b)$ $(a < b;\text{parametri } a,b \in \mathbb{R})$, $S_X = (a,b)$, $X = \begin{cases} x \in (a,b) \\ f(x) = \dfrac{1}{b-a} \end{cases}$

Funzione di densità di probabilità: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & x \in [a,b] \ \ (\text{oppure } x \in (a,b), \text{ecc.}) \\ 0 & altrove \end{cases}$

$$E(X) = \mu_X = \frac{a+b}{2},\ V(X) = \sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

v.a. GAUSSIANA o NORMALE STANDARDIZZATA

Simbologia: $Z \sim N(0;1)$ dove si dimostra che $0 = \mu_Z = E(Z)$, $1 = \sigma_Z^2 = V(Z)$

Insieme dei valori possibili: $S_Z = \mathbb{R}$

Funzione di densità di probabilità: $f_Z(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}$ $\forall z \in \mathbb{R}$ $(\pi = 3.14159265...,\ e = 2.718281828...)$

Rappresentazione grafica della funzione di densità di probabilità: è la tipica forma "a campana" simmetrica con asse di simmetria dato dall'asse delle ordinate e con le due "code" che tendono a zero a sinistra e a destra dell'asse delle ordinate rispettivamente per $z \to -\infty$ ed $z \to \infty$. Il cambiamento della concavità da verso il basso a verso l'alto, necessario affinché le code possano tendere a zero rimanendo positive, ha luogo in corrispondenza di $z = -1$ e $z = 1$.

Tavole numeriche della funzione di densità di probabilità della gaussiana standardizzata per il calcolo delle probabilità.

$$P(Z \le 1.12) = \int_{-\infty}^{1.12} f_Z(z)\,dz = \int_{-\infty}^{1.12} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = ? = 0.8686$$

ESEMPIO di lettura della tavola numerica della gaussiana standardizzata

Determinare la probabilità di cui sopra con la tavola numerica della gaussiana standardizzata:

$$P(Z \le 1.12) = ?$$

$$\boxed{1.12 \to \begin{cases} 1.1 \text{ prime due cifre} \to \text{riga della tavola} \\ 0.02 \text{ terza cifra} \to \text{colonna della tavola} \end{cases}}$$

	colonna della tavola $\boxed{0.02}$	
	$\downarrow$	
riga della tavola $\boxed{1.1} \to$	$\boxed{0.8686}$	$= P(Z \le 1.12)$

$$P(Z \le -z) = 1 - P(Z \le z) \quad (z > 0),\; P(Z \ge -z) = P(Z \le z) \quad (z > 0)$$

v.a. GAUSSIANA o NORMALE NON STANDARDIZZATA

Simbologia: $X \sim N(\mu_X;\sigma_X^2)$

dove si dimostra che i due parametri sono dati proprio da:

$\mu_X = E(X) \in \mathbb{R},\; \sigma_X^2 = V(X) \in (0,\infty)$

Insieme dei valori possibili: $S_X = \mathbb{R}$

Funzione di densità di probabilità: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\pi = 3.14159265...,\; e = 2.718281828...)$

Rappresentazione grafica della funzione di densità di probabilità: è la tipica forma "a campana" simmetrica con asse di simmetria dato dalla perpendicolare all'asse delle ascisse **che passa per il punto** μ_X (= 0, nel caso della gaussiana standardizzata) e con le due "code" che tendono a zero a sinistra e a destra dell'asse delle ordinate rispettivamente per $x \to -\infty$ ed $x \to \infty$. Il cambiamento della concavità da verso il basso a verso l'alto, necessario affinché le code possano tendere a zero rimanendo positive, ha luogo in corrispondenza di $x = \mu_X - \sigma_X$ e $x = \mu_X + \sigma_X$.((= -1 e 1, nel caso della gaussiana standardizzata).

Calcolo delle probabilità per la gaussiana non standardizzata $X \sim N(\mu_X;\sigma_X^2)$. Ci si riconduce al caso standardizzata con la seguente formula:

$$\boxed{P(X \le x) = P\left(Z \le \frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)} \text{ con } Z \sim N(0;1).$$

Quantile q_α di ordine $\alpha \in (0,1)$ della v.a. $X \sim N(\mu_X;\sigma_X^2)$

Caso di $\alpha \ge 0.5$ (e quindi $q_\alpha \ge \mu_X$, e quindi $q_\alpha - \mu_X \ge 0$): $\boxed{q_\alpha = \mu_X + z_\alpha \sigma_X}$

Caso di $\alpha \le 0.5$ (e quindi $q_\alpha \le \mu_X$, e quindi $q_\alpha - \mu_X \le 0$): $\boxed{q_\alpha = \mu_X - z_{1-\alpha} \sigma_X}$

v.a. LOGONORMALE

Simbologia: $Y = e^X \sim LN(\mu_X;\sigma_X^2)$ di parametri μ_X e σ_X^2 con $X \sim N(\mu_X;\sigma_X^2)$

Insieme dei valori possibili: $S_X = (0,\infty)$

Funzione di densità di probabilità:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}}\, e^{-\frac{(\ln y - \mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}} & y \in (0,\infty) \quad (\pi = 3.14159265...,\; e = 2.718281828...) \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

<u>Rappresentazione grafica della funzione di densità di probabilità</u>: $f_Y(y)$ è nulla per valori y negativi, poi incomincia a cresce abbastanza rapidamente a partire da zero e per valori y crescenti non troppo grandi, dopodiché, raggiunto il massimo, decresce tendendo a zero per valori y tendenti ad infinito. In conclusione $f_Y(y)$ è obliqua a destra. Infatti, si dimostra che:

$\mathrm{mod}(Y) = e^{\mu_X - \sigma_X^2} < \mathrm{med}(Y) = e^{\mu_X} < \mu_Y = E(Y) = e^{\mu_X + \frac{1}{2}\sigma_X^2}$, inoltre si ha: $\sigma_X^2 = V(X) = E(X)^2 \left(e^{\sigma_X^2} - 1\right)$

<u>Calcolo delle probabilità per la logonormale</u> $Y = e^X \sim LN\left(\mu_X; \sigma_X^2\right)$ con $X \sim N\left(\mu_X; \sigma_X^2\right)$. Ci si riconduce al caso della gaussiana standardizzata con la seguente formula:

$$\boxed{P(Y \le y) = P(X \le \ln y) = P\left(Z \le \frac{\ln y - \mu_X}{\sigma_X}\right)} \text{ con } Z \sim N(0;1)$$

La v.a. *Logonormale* ed una sua applicazione in Finanza:

la v.a. S_t = "prezzo al tempo $t > 0$ di un titolo quotato"
funzione della
v.a. $R_t \sim N\left(\mu_{R_t}; \sigma_{R_t}^2\right)$ = "rendimento gaussiano del titolo stesso dal tempo iniziale 0 al tempo $t > 0$"

e precisamente, si dimostra sotto opportune ragionevoli ipotesi, che tale funzione è data da:

$S_t = s_0 e^{R_t}$ con $e^{R_t} \sim LN\left(\mu_{R_t}; \sigma_{R_t}^2\right)$ e s_0 = prezzo (osservato) del titolo al tempo iniziale 0