

**Metodi Probabilistici Statistici e Processi Stocastici**  
**17 Novembre 2005**

Nome: \_\_\_\_\_

Cognome: \_\_\_\_\_

Matricola: \_\_\_\_\_

Scrivete la vostra risposta ufficiale nello spazio apposito. Giustificate la risposta scrivendo i calcoli ed il procedimento utilizzato o nei medesimi spazi o sul foglio di brutta. Risultati non giustificati non verranno considerati.

1. Le variabile casuale  $X$  è caratterizzata dalla densità

$$f_X(x) = k \left( x^{\frac{1}{4}} \right) \quad (1)$$

con  $0 < X < 1$ .

(a) Determinate  $k$

(b) Determinate il Valore atteso di  $X$

La variabile casuale  $Y$  è legata ad  $X$  dalla relazione:

$$Y = g(X) = 3X^{\frac{1}{2}} + 2 \quad (2)$$

(c) Determinate la densità di  $Y$ , ovvero  $f_Y(y)$

(d) Determinate il valore atteso di  $Y$  con l'approssimazione del 2° ordine.

-----  
(a)

$$\int f_X(x)dx = \frac{4}{5}kx^{\frac{5}{4}} \quad (3)$$

$$\int_0^1 f_X(x)dx = \frac{4}{5}k \quad (4)$$

$$\frac{4}{5}k = 1 \quad (5)$$

la soluzione è

$$k = \frac{5}{4} \quad (6)$$

(b)  $\int x f_X(x)dx = \frac{5}{9}x^{\frac{9}{4}}$

$$\int_0^1 x f_X(x)dx = \frac{5}{9} \quad (7)$$

(c)

$$g(X) = 3X^{\frac{1}{2}} + 2 \quad (8)$$

$$g'(X) = \frac{3}{2\sqrt{X}} \quad (9)$$

$$f_Y = \frac{5}{6}x^{\frac{3}{4}} \quad (10)$$

$$f_Y(y) = f_X(x) * \frac{1}{g'(x)}$$

$$f_X(x) * \frac{1}{g'(x)} = \frac{5}{6}x^{\frac{3}{4}} \quad (11)$$

Sostituendo per  $Y$ :

$$X = \left(\frac{Y}{3} - 2\right)^2 \quad (12)$$

$$f_Y(y) = \frac{5}{6}\left(\frac{Y}{3} - 2\right)^{\frac{3}{2}} \quad (13)$$

(d)

$$E[Y] = g\left(\frac{5}{9}\right) + g''\left(\frac{5}{9}\right)\frac{V[X]}{2} \quad (14)$$

$$V[X] = \int_0^1 \left[x - \frac{5}{9}\right]^2 f_X(x) dx = \frac{80}{1053} = 7.60 \times 10^{-2} \quad (15)$$

$$E[Y] = g\left(\frac{5}{9}\right) + g''\left(\frac{5}{9}\right)\frac{7.60 \times 10^{-2}}{2} = 4.17 \quad (16)$$

2. Siete incaricati di controllare la qualità delle merci ed effettuare una previsione sui costi dell'inefficienza produttiva per il prossimo anno. Il vostro cliente non accetta la presenza di difetti, quindi i prodotti sono o rigettati o accettati. I dati dello scorso anno vi portano a utilizzare una distribuzione beta di parametri  $r = 5000$  e  $q = 50000$ . Quest'anno saranno prodotti altri  $N = 10000$  pezzi:

- (a) Quanti vi aspettate che siano difettosi? (Utilizzate  $n = \hat{p}N$  dove  $\hat{p}$  è la probabilità attesa di difetto come da distribuzione beta assegnata a priori).
- (b) Se per ogni pezzo non accettato avete una perdita di  $c = 100EUR$ , quanto vi aspettate di perdere?  
Al termine dell'anno lavorativo le verifiche vi dicono che i pezzi difettosi sono risultati 500.
- (c) Qual è la nuova distribuzione di  $p$  aggiornata dopo l'evidenza?
- (d) Qual è il nuovo valore atteso di  $p$ ?
- (e) Quanto prevedete di perder l'anno successivo con la nuova densità su  $p$ , posto ancora  $N = 10000$  e  $c = 100EUR$ ?

(a)

$$\hat{p} = \frac{r}{r+q} = \frac{5000}{5000+50000} = 9.10 \times 10^{-2} \quad (17)$$

$$n = 9.10 \times 10^{-2} \times 10000 = 910 \quad (18)$$

(b)

$$910 \times 100 = 91000 \quad (19)$$

(c)

$$\beta(5500, 50000 + 10000 - 500) = \beta(5500, 59500) \quad (20)$$

(d)

$$\hat{p}' = \frac{5500}{5500+59500} = 8.4615 \times 10^{-2} \quad (21)$$

(e)

$$8.4615 \times 10^{-2} \times 100 \times 10000 \quad (22)$$

:

$$84615 \quad (23)$$

.

3. Gli arrivi ad un supermercato si susseguono con una distribuzione di Poisson:

$$P(n; \lambda, T) = \frac{e^{-\lambda T}}{n!} (\lambda T)^n \quad (24)$$

dove  $\lambda$  è misurato in [1/anni]. Se negli ultimi 5 anni avete avuto i seguenti arrivi (in migliaia):

$$\begin{array}{r} 15 \\ 25 \\ 32 \\ 27 \\ 36 \end{array} \quad (25)$$

quanto è il tasso di arrivi  $\lambda$  misurato secondo il metodo della massima verosimiglianza?

$$\frac{e^{-\lambda}}{15!} (\lambda)^{15} \frac{e^{-\lambda}}{25!} (\lambda)^{25} \frac{e^{-\lambda}}{32!} (\lambda)^{32} \frac{e^{-\lambda}}{27!} (\lambda)^{27} \frac{e^{-\lambda}}{36!} (\lambda)^{36} \quad (26)$$

$$: \quad = A \times \lambda^{135} e^{5(-\lambda)} \quad (27)$$

Taking the logarithm:

$$h(\lambda) = \ln A + \ln \lambda^{135} + \ln e^{5(-\lambda)} \quad (28)$$

$$\frac{d}{d\lambda} h(\lambda) = \frac{135}{\lambda} - 5 \quad (29)$$

$$\frac{135}{\lambda} - 5 = 0 \quad (30)$$

$$\lambda = 27 \quad (31)$$

4. Volete generate dei numeri dalla distribuzione:

$$f_X(x) = k \left( x^{\frac{1}{4}} \right) \quad (32)$$

con  $0 < X < 1$ , la stessa del primo problema.

Supponendo di avere a disposizione i seguenti 10 numeri casuali,

$$\begin{array}{c} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.33 \\ 0.41 \\ 0.5 \\ 0.67 \\ 0.76 \\ 0.8 \\ 0.9 \\ 0.93 \end{array} \quad (33)$$

(a) Determinate i 10 valori corrispondenti di  $X$

(b) Determinate il corrispondente valor medio e la stima della varianza di  $X$ .

$$\int_0^x f_X(s) ds = x^{\frac{5}{4}} \quad (34)$$

Ne segue:

$$x = u^{\frac{4}{5}} \quad (35)$$

da cui:

	0,10	0,15849	
	0,20	0,27595	
	0,33	0,41192	
	0,41	0,49003	
	0,50	0,57435	
	0,67	0,72587	
	0,76	0,80288	
	0,80	0,83651	
	0,90	0,91917	
	0,93	0,94360	
(a)	media		0,61388

5. Considerando la seguente funzione generatrice dei momenti

$$\Psi(t) = e^{t+8t^3} \quad (36)$$

stabilite valor medio e varianza della variabile casuale  $X$ .

---

$$\Psi'(t) = e^{t+8t^3} (24t^2 + 1) \quad (37)$$

$$E[X] = \Psi'(0) = 1 \quad (38)$$

$$\Psi''(t) = 48te^{t+8t^3} + e^{t+8t^3} (24t^2 + 1)^2 \quad (39)$$

$$\Psi''(0) = 1 \quad (40)$$

$$V[X] = \Psi''(0) - [\Psi'(0)]^2 = 0 \quad (41)$$