

**Metodi Probabilistici Statistici e Processi Stocastici**  
**23 Novembre 2007**

Nome: \_\_\_\_\_

Cognome: \_\_\_\_\_

Matricola: \_\_\_\_\_

Il testo contiene 3 problemi. Scrivete la vostra risposta ufficiale nello spazio apposito. Giustificate la risposta scrivendo i calcoli ed il procedimento utilizzato o nei medesimi spazi o sul foglio di brutta. Risultati non giustificati non verranno considerati.

**1** La variabile aleatoria  $X$ , con valori in  $0 < x < 1$  è caratterizzata dalla densità:

$$f_X(x) = k(x^{\frac{1}{6}}) \quad (1)$$

**1.a** Determinate  $k$ .

**1.b** Determinate il valore atteso di  $X$

**1.c** Determinate la varianza di  $X$

-----

**1.a**  $\int_0^1 k(x^{\frac{1}{6}})dx = \frac{6}{7}k$

$$k = \frac{7}{6} \quad (2)$$

**1.b**  $\int_0^1 kx(x^{\frac{1}{6}})dx = \frac{7}{13}$

**1.c**  $\int_0^1 k(x - \frac{7}{13})^2(x^{\frac{1}{6}})dx = \frac{252}{3211}$

**2** Siete responsabili di qualità di un supermercato. Sulle centinaia e centinaia di prodotti alimentari che trattate all'anno, avete notato che la frazione di prodotti avariati si aggira tra lo 0.005 e lo 0.05 a seconda dei fornitori, con distribuzione beta di parametri 3 e 4. Il vostro superiore vi chiede di stimare la probabilità che un prodotto sia avariato per l'anno prossimo. A tal fine avete predisposto il controllo di 1000 scatole. Dall'analisi risulta che 10 contengono prodotti avariati.

**2.a** Quanto dovete suggerire? (Sugg.: il valore atteso di una variabile Beta generica è:

$$E[X] = \frac{r}{r+q}(b-a) + a).$$

**2.a**

$$a = 0.005 \tag{3}$$

$$b = 0.05 \tag{4}$$

$$r = 3 \tag{5}$$

$$q = 4 \tag{6}$$

$$E_X = \frac{r}{r+q}(b-a) + a \tag{7}$$

$$E_X = 2.4286 \times 10^{-2} \tag{8}$$

$$D = 10 * 12 * 1500 = 180\,000 \tag{9}$$

**2.b**

$$c = 10 \tag{10}$$

$$n = 1000 \tag{11}$$

$$r_1 = r + c \tag{12}$$

$$: r_1 = 13$$

$$q_1 = q + n - c \tag{13}$$

$$: q_1 = 994$$

$$E1_X = \frac{r_1}{r_1 + q_1}(b-a) + a \tag{14}$$

$$: E1_X = 5.5809 \times 10^{-2}$$

**3** Avete a disposizione i seguenti 5 numeri da una distribuzione uniforme:

$$\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.6 \\ 0.25 \\ 0.3 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Calcolate i valori corrispondenti per una variabile casuale distribuita con una distribuzione esponenziale di tasso  $\lambda = 100$ .

---

4 La variable  $Y$  dipende dalla variable  $X$  ( $0 < x < 1$ ) secondo la seguente relazione:

$$y = g(x) = 3 + x^2 \quad (16)$$

4.a Quali valori può assumere  $y$ ?

4.b Se  $X$  è distribuita secondo una distribuzione uniforme, calcolate la distribuzione della variable  $y$ .

4.c Se  $X$  è distribuito secondo una densità Beta di parametri 3 e 1, determinate la distribuzione di  $y$ .

4.d Determinate il valore atteso di  $y$  nel caso della distribuzione del punto 4.a con la formula di Taylor al II ordine.

---

4.b

$$g(x) = 3 + x^2 \quad (17)$$

$$g'(x) = 2x \quad (18)$$

$$f_y(y) = 1 \cdot \frac{1}{g'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y-3}} \quad (19)$$

$$: yf_y = \frac{1}{2x}$$

4.c  $f_y(y) = x^2 \cdot \frac{1}{g'(x)} = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\sqrt{y-3}$

4.d