FISICA GENERALE

MODULO DI ELETTROMAGNETISMO

Prova Pre-Esame del 28 GENNAIO 2009
A.A. 2008-2009

Esercizi	FIS GEN: Punteggio in 30-esimi
1-8	Fino a 4 punti

COGNOME:__________________________NOME: __________________________MATR:___________

1. Campo elettrostatico

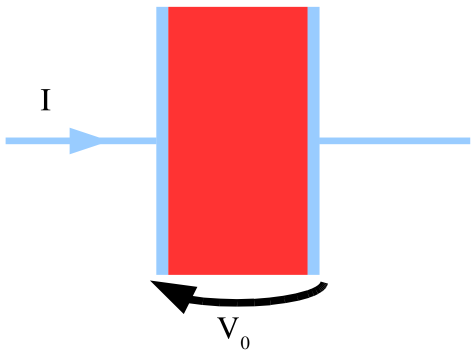
La sfera di figura è composta da un materiale isolante ed è caricata con una carica Q>0. Determinare l'andamento del campo elettrostatico nello spazio.

2. Lavoro del campo elettrostatico

La particella q= -10^{-9} C possiede velocità in A $\mathbf{v}_A$=(80 m/s)**i** ed è immersa in un campo elettrico uniforme E=2000 V/m. Determinare la sua velocità $\mathbf{v}_B$ sulla sezione B, a distanza di 1 mm da A, sapendo che la sua massa è m=10^{-12} kg.

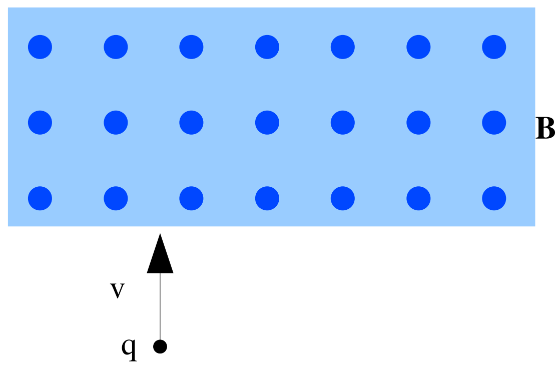
3. Condensatori

Il condensatore di figura resiste ad una tensione massima di 30 V. Esso si trova inizialmente alla tensione V_0 =20 V. Si sa che esso ha una capacità C=1μF. Determinare quanto tempo occorre perché si rompa quando viene alimentato da una corrente costante I=1 mA.



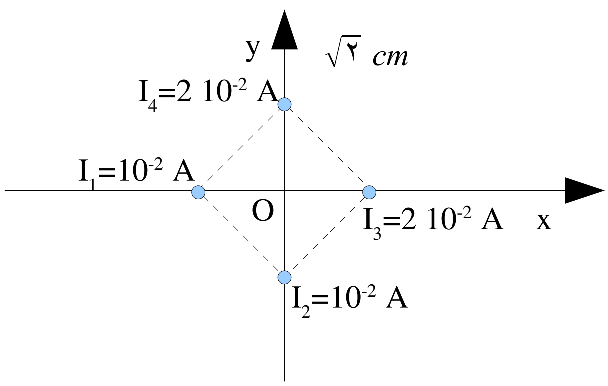
4. Forza magnetica su una particella carica

La particella di carica q=1 pC e massa m= 10^{-15} kg di figura entra nel *semipiano* in cui è presente un campo magnetico B=1 T. Determinare la traiettoria del moto e quanto tempo essa passa nel semipiano.



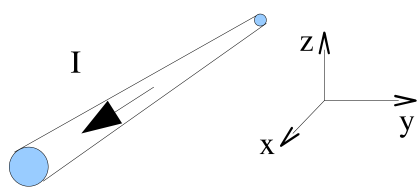
5. Momento di dipolo magnetico

Determinare la posizione di un ago magnetico posto nell'origine degli assi in figura.



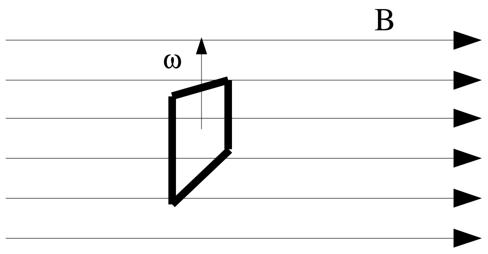
6. Forza magnetica su un conduttore percorso da corrente

Il conduttore di figura ha una lunghezza l=1m, una massa m=20 g ed è percorso da una corrente I=3 A. Determinare il campo magnetico **B** in modulo direzione e verso affinché esso stia sollevato a mezz'aria.



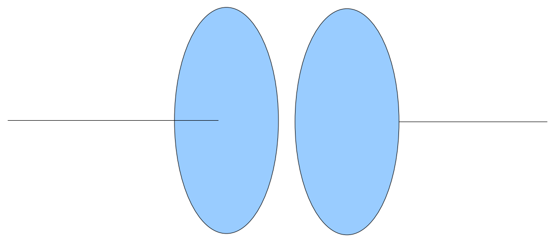
7. Legge di Faraday Henry

Il campo magnetico di figura varia nel tempo secondo la funzione $B(t)=1-e^{-t}$ T. Una spira immersa in esso ruota a velocità angolare ω=100 rad/s. La spira ha un'area di 1 cm^2 e possiede una resistenza R=50 Ω. Determinare la f.e.m. e la corrente circolante indotte.



7. Legge di Ampere-Maxwell

Il condensatore di figura è caricato con una carica $q(t)=10^{-5}\cos 100t$ C. Esso ha armature circolari di raggio r=1mm, distanti 0.1 mm, riempite con un dielettrico di ε_r=100 e μ_r=10. Determinare il campo magnetico interno al condensatore lungo un percorso circolare delle stesse dimensioni del condensatore e la corrente di spostamento ad esso associata.



Costanti:

$\epsilon_0 = 8.85\ 10^{-12}$ F/m

$\mu_0 = 4\ \pi\ 10^{-7}$ H/m

SOLUZIONI

1. Campo elettrostatico

Risolviamo il problema separatamente all'interno e all'esterno della sfera carica. All'interno di essa la densità di carica è la carica per unità di volume, ovvero $\frac{Q}{V}=\frac{Q}{\frac{٤}{٣}\pi R^{٣}}$. Selezionando quindi al suo interno una sfera di raggio *r'<R* e applicando il teorema di Gauss otteniamo il campo elettrico su una superficie interna:

$$E(r')4\pi r'^2=\frac{1}{\epsilon}\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r'^3$$

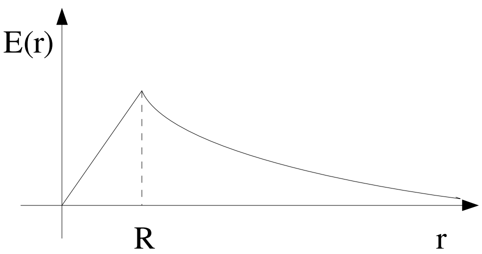
dove il secondo termine è la quantità di carica contenuta in una sfera di raggio *r'*. Semplificando si ottiene

$$E(r')=\frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q}{R^3}r' \quad ,$$

che ha andamento lineare. All'esterno il calcolo è più semplice. Basta infatti applicare il teorema di Gauss per ottenere

$$E(r)4\pi r^2=\frac{Q}{\epsilon_0} \quad ,$$

da cui $E(r)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. Il grafico di E(r) quindi è



2. Lavoro del campo elettrostatico

Il problema si può risolvere con il teorema Lavoro- Energia Cinetica, che applicato a questo caso ci dice che :

$$\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2=\vec{F}_{el}\cdot\vec{d}$$

da cui

$$v_B=\sqrt{v_A^2+2\frac{\vec{F}_{el}}{m}\cdot\vec{d}} \quad \text{ovvero}$$

$$v_B=\sqrt{v_A^2+\frac{2q}{m}E\,\hat{i}\cdot d\,\hat{i}}=\sqrt{6400-4000}=48.99\ m/s \quad .$$

3. Condensatori

La carica contenuta al tempo t dal condensatore è la carica iniziale a cui viene aggiunta la carica IΔt data dalla corrente:

$Q(t)=Q_0+I\,\Delta t$. Dividendo entrambi i membri per la capacità C del condensatore otteniamo

$$V(t)=V_0+\frac{I}{C}\Delta t \quad \text{da cui}$$

$$\Delta t=\frac{(V(t)-V_0)C}{I}$$

se ora al posto di V(t) sostituiamo V_{max} ricaviamo il tempo richiesto:

$$\Delta t=\frac{(30-20)10^{-6}}{10^{-3}}=10^{-2}\ s \quad .$$

4. Forza magnetica su una particella carica

La particella entrando nel campo magnetico risente della forza magnetica $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ e poiché questa forza è perpendicolare alla velocità, intraprende un moto circolare uniforme di raggio $r = \frac{mv}{qB}$. Tuttavia la particella, descritta una semicirconferenza, si trova fuori dal campo magnetico, per cui essa riprende il suo moto rettilineo ed uniforme in verso opposto rispetto a quello iniziale. Il tempo in cui la particella resta nel campo magnetico è il tempo da essa impiegato per descrivere la semicirconferenza. Questo è

$$\Delta t = \frac{\pi r}{v} = \frac{\pi m}{qB} = 3.14\ 10^{-3}\ s\ .$$

5. Momento di dipolo magnetico

Innanzitutto calcoliamo il campo magnetico totale $\vec{B}$ in O dato dalla somma dei campi magnetici dei quattro conduttori di figura. Le distanze r_i sono tutte uguali a 1 cm, per cui i campi magnetici saranno

$$\vec{B}_1(O) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\hat{j} = (2\ 10^{-7}T)\hat{j}$$
$$\vec{B}_2(O) = -\frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}\hat{i} = -(2\ 10^{-7}T)\hat{i}$$
$$\vec{B}_3(O) = -\frac{\mu_0 I_3}{2\pi r_3}\hat{j} = -(4\ 10^{-7}T)\hat{j}$$
$$\vec{B}_4(O) = \frac{\mu_0 I_4}{2\pi r}\hat{i} = (4\ 10^{-7}T)\hat{i}$$

Da queste ricaviamo il campo magnetico $\vec{B} = (2\ 10^{-7}T)\hat{i} - (4\ 10^{-7}T)\hat{j}$. Le coordinate polari del campo magnetico sono $B = 4.47\ 10^{-7}\ T$ e $\theta_B = -63.43°$. Un ago magnetico posto nel punto O si disporrà quindi come un vettore nello stesso senso di B.

6. Forza magnetica su un conduttore percorso da corrente

In presenza di campo magnetico il filo subisce una forza magnetica pari a $\vec{F}_m = I\vec{L} \wedge \vec{B}$. Affinché il filo leviti, questa forza deve essere uguale ed opposta alla forza peso, in modo tale che la somma delle forze agenti sul conduttore sia nulla, ed esso non subisca alcuna accelerazione (equilibrio dinamico): $\vec{F}_m + \vec{P} = 0$ Dall'ultima espressione vediamo che, se la forza peso è opposta al versore $\hat{z}$, allora la forza magnetica sarà lungo questo $\vec{F}_m = ILB\hat{z}$. Poiché la corrente I (che da il verso di $\vec{L}$) è lungo il versore $\hat{x}$, ponendo il medio lungo $\hat{z}$, il pollice lungo $\hat{x}$, l'indice si disporrà automaticamente lungo $\hat{y}$. Il campo magnetico da accendere quindi sarà $\vec{B} = \frac{mg}{IL}\hat{y} = (6.54\ 10^{-2}T)\hat{y}$.

7. Legge di Faraday Henry

La legge di Faraday-Henry afferma che un flusso di campo magnetico variabile nel tempo genera una forza elettromotrice sul confine della superficie nella quale è calcolato il flusso: $f.e.m. = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}(t)\cdot\hat{n}\,ds$. Nel nostro esercizio il campo magnetico dipende dal tempo e la spira sta ruotando. Tuttavia, poiché il campo magnetico è uniforme e non dipende da coordinate spaziali, possiamo portarlo fuori dal segno di integrale e ottenere $f.e.m. = -A\frac{d}{dt}(B(t)\cos\omega t)$ dove A è la superficie della spira ed la funzione coseno deriva dal fatto che la spira sta ruotando. La derivata da calcolare è

$\frac{d}{dt}(1-e^{-t})\cos\omega t = e^{-t}\cos\omega t - (1-e^{-t})\sin\omega t = e^{-t}(\cos\omega t + \sin\omega t) - \sin\omega t$. La prima funzione scompare esponenzialmente, quindi il risultato tende a $\sin\omega t$ per tempi sufficientemente grandi. La forza elettromotrice quindi è data da $f.e.m. = -10^{-4}[e^{-t}(\cos\omega t + \sin\omega t) - \sin\omega t]V$ mentre la corrente circolante da $i(t) = \frac{f.e.m.}{R} = -2\ 10^{-6}[e^{-t}(\cos\omega t + \sin\omega t) - \sin\omega t]A$.

8. Legge di Ampere Maxwell

La legge di Ampere Maxwell afferma che un flusso di campo elettrodinamico variabile genera un campo magnetico secondo la formula

$$\oint_C \vec{B}(t)\cdot\vec{dl}=\epsilon\mu\frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,ds \quad .$$

Nel nostro caso, campo elettrico e magnetico sono uniformi nello spazio, per cui i due integrali diventano $B(t)\,\text{٢}\pi r=\epsilon\mu S\frac{d}{dt}E(t)$. A questo punto ricaviamo il campo elettrico all'interno del condensatore come $E(t)=\frac{q(t)}{C}d$ dove la capacità del condensatore è $C=\frac{\epsilon S}{d}$. A questo punto possiamo ottenere il campo magnetico indotto $B(t)=\frac{\epsilon\mu S}{\text{٢}\pi r\epsilon S}\frac{d}{dt}q(t)=\frac{\mu}{\text{٢}\pi r}\frac{d}{dt}q(t)=-\text{٢}\ \text{١٠}^{-\text{٦}}\sin\text{١٠٠}t\ T$. Come si vede i risultati sono indipendenti dalla costante dielettrica e dalla distanza tra le due armature. La corrente di spostamento è $i_s(t)=\frac{d}{dt}q(t)=-10^{-3}\sin 100t\ A$.