AD: Processi Stocastici Esercizi

1 Dato un processo di Poisson con tasso

$$\lambda = 10[1/anno] \tag{1}$$

(a) Quanto è il tempo medio di attesa tra un evento e l'altro?

(b) Quanto occorre attendere in media per il $100mo$ evento?

(c) Se ad ogni evento corrisponde un danno con probabilità p=0.5, quanto tempo si aspetta per il primo danno?

(a) Distribuzione esponenziale:

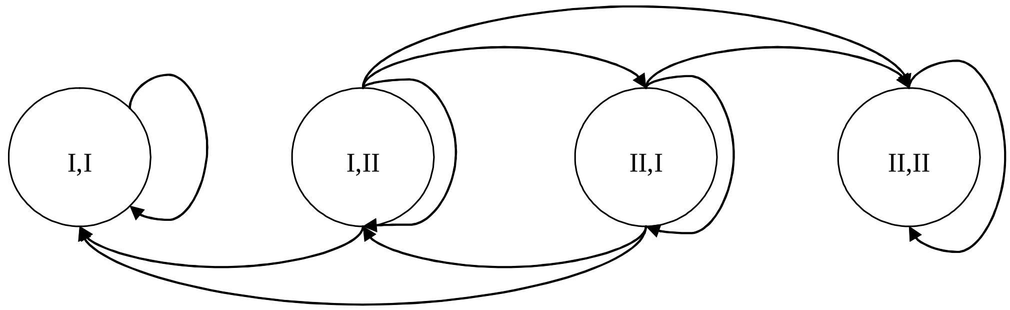
$$E[t] = \frac{1}{\lambda} = 0.1 \tag{2}$$

(b) Distribuzione gamma:

$$E[T_{100}] = \frac{N}{\lambda} = \frac{100}{10} = 10anni \tag{3}$$

(c) Distribuzione esponenziale:

$$E[t] = \frac{1}{\lambda p} = 0.2 \tag{4}$$



(a)

1. Due calamite di segno opposto (A e B) si muovono in una scatola con due zone, I e II. La prima calamita ha probabilità di transizione condizionali date da:

$$\begin{bmatrix} h & 1-h \\ w & 1-w \end{bmatrix}, 0 < h, w < 1 \tag{5}$$

Ovvero la probabilità che la calamita A rimanga nella zona I dato che è nella zona I è h, che vada nella zona due è ... (?). Similmente per la calamita B si ha:

$$\begin{bmatrix} c & 1-c \\ m & 1-m \end{bmatrix}, 0 < c, m < 1 \tag{6}$$

Il meccanismo si interrompe se le due calamite si trovano nella stessa zona. Definite gli stati del sistema come la disposizione delle due calamite (es. calamita A in zona I, calamita B in zona II).

(a) Disegnare il diagramma degli stati del sistema

——

2. I tempi di arrivo delle chiamate ad un call center seguono un processo di Poisson con tasso

$$\lambda = 60[1/ora] \tag{7}$$

   (a) Quanto è il tempo medio di attesa tra una chiamata e l'altra successivo?

   (b) Quante ore occorrono per per il 10^{mo} arrivo?

   (c) Se, dato un arrivo, la probabilità che la telefonata superi i 3 minuti è p=0.1, quante telefonate superiori ai 3 minuti ci si aspetta in 8 ore?

   a 1 minuto

   b 10minuti

   c E[nr Chiamate]=$60 * 0.1 * 8 = 48.0$

3. Siete un'azienda di assicurazioni e state assicurando sciatori. Il tasso di cadute giornaliere è pari a λ =2/giorno.

   (a) Ogni quanto avvengono cadute?

   (b) Quanto occorre aspettare per arrivare a 100 cadute?

   (c) Qual è la probabilità che si verifichino 300 cadute in un mese?

Soluz. a) 1/2 al giorno; b) 50gg; c) $P = \frac{(2 \cdot 30)^{300}}{300!} \cdot e^{-2 \cdot 30}$

4. Un impianto può trovarsi in 3 stati: perfettamente funzionante, parzialmente funzionante e fuori funzionamento. Se il sistema è funzionante allora può passare a parzialmente funzionante con probabilità 0.05 e a fuori funzionamento con probabilità 0.01. Se è parzialmente funzionante allora può passare a funzionante con probabilità 0.1 e a fuori funzionamento con probabilità 0.2. Se è fuori funzionamento la riparazione lo riporta parzialmente funzionante con probabilità 0.05 e funzionante con probabilità 0.9.

   (a) Rappresentare il diagramma di stato del sistema

   (b) Determinare la corrispondente matrice di Markov

   (c) Calcolare la probabilità limite del sistema

   (d) Dati la matrice di occupazione degli stati a k=10 passi:

$$M(10) = \begin{pmatrix} 9.528 & 1.167 & 0.306 \\ 6.138 & 3.999 & 0.863 \\ 8.486 & 1.167 & 1.347 \end{pmatrix}$$

   ed il vettore dei costi associati agli stati:

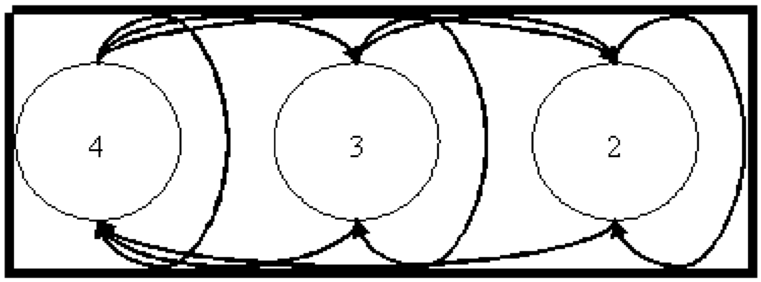
$$\begin{matrix} 100 \\ 50 \\ -150 \end{matrix} \tag{8}$$

   calcolare il vettore guadagno/perdita condizionale del sistema dopo 10 passi (NB: è un vettore con tre componenti, ciascuna in dipendenza dallo stato di partenza).

   (e) Se k tende a infinito, quale è il guadagno/perdita attesa del sistema (NB: è un numero).

   (f) In quest'ultimo caso, quanto dovrebbe essere la perdita associata al non funzionamento per rendere conveniente la sostituzione dello stesso?

DIAGRAMMA DEGLI STATI



MATRICE DI TRANSIZIONE

$$P := \begin{pmatrix} 0.94 & 0.05 & 0.01 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.9 & 0.05 & 0.05 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0.94 & 0.05 & 0.01 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.9 & 0.05 & 0.05 \end{pmatrix}$$

PROBABILITA LIMITE

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left| P^T - I \right| = 0 \qquad A := P^T - I \qquad A = \begin{pmatrix} -0.06 & 0.1 & 0.9 \\ 0.05 & -0.3 & 0.05 \\ 0.01 & 0.2 & -0.95 \end{pmatrix} \qquad |A| = 0$$

$$P1 := \begin{pmatrix} -0.06 & 0.1 & 0.9 \\ 0.05 & -0.3 & 0.05 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi := \mathrm{lsolve}(P1, b) \qquad \pi = \begin{pmatrix} 0.818 \\ 0.143 \\ 0.039 \end{pmatrix} \qquad \sum_{s=0}^{2} \pi_s = 1$$

$$100 * 0.818 + 50 * 0.143 + x * 0.039 = 0 \tag{9}$$

$$M(k) := \sum_{n=0}^{k} P^n$$

$$m(k) := \frac{\sum_{n=0}^{k} P^n}{k}$$

$$M(10) = \begin{pmatrix} 9.528 & 1.167 & 0.306 \\ 6.138 & 3.999 & 0.863 \\ 8.486 & 1.167 & 1.347 \end{pmatrix}$$

$$m(10000) = \begin{pmatrix} 0.819 & 0.143 & 0.039 \\ 0.818 & 0.143 & 0.039 \\ 0.818 & 0.143 & 0.039 \end{pmatrix}$$

$$c := \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ -150 \end{pmatrix}$$

$$M(10)\cdot c = \begin{pmatrix} 965.252 \\ 684.223 \\ 704.836 \end{pmatrix}$$

$$\pi\cdot c = 83.185$$

, Solution is: -2280.8

1. State considerando un sistema di produzione. Lo pensate caratterizzato da 3 stati: "perfettamente funzionante," "parzialmente funzionante" e "guasto." Se il sistema è perfettamente funzionante passa a parzialmente funzionante con probabilità 0.1 e a guasto con probabilità 0.05. Se il sistema è parzialmente funzionante viene chiamata una squadra di riparazione che lo riporta a perfettamente funzionante con probabilità 0.8, o lo lascia nello stato parzialmente funzionante. Se il sistema è guasto allora la riparazione lo riporta funzionante con probabilità 0.7 o parzialmente funzionante con probabilità 0.2, mentre rimane guasto con la rimanente probabilità.

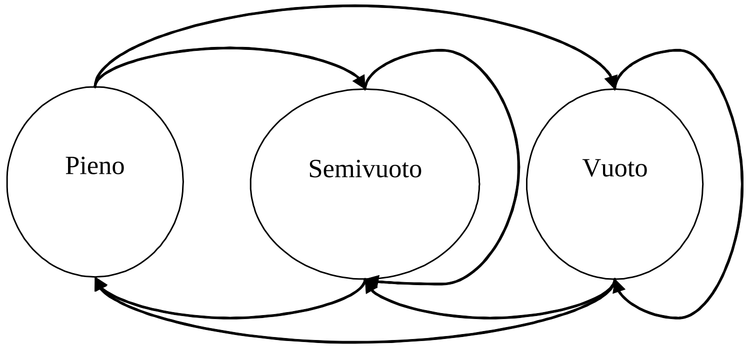
    (a) Determinate il diagramma di stato del sistema

    (b) Determinate la corrispondente matrice di Markov

    (c) Determinate la distribuzione di probabilità limite per il sistema

    (d) Dato il seguente vettore profitto del sistema: $\begin{matrix} 50 \\ 20 \\ -90 \end{matrix}$, calcolate il profitto per unità di tempo a regime.

DIAGRAMMA DEGLI STATI



MATRICE DI TRANSIZIONE

$i := 0$

$$P := \begin{pmatrix} 1 - 0.1 - 0.05 & 0.1 & 0.05 \\ 0.8 & .2 & 0 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.1 & 0.05 \\ 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix} \qquad \sum_{j=(}^{2}$$

PROBABILITA LIMITE

$$P^T = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.8 & 0.7 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 \\ 0.05 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left|P^T - I\right| = 0 \qquad A := P^T - I \qquad A = \begin{pmatrix} -0.15 & 0.8 & 0.7 \\ 0.1 & -0.8 & 0.2 \\ 0.05 & 0 & -0.9 \end{pmatrix} \qquad |A| = 0$$

$$P1 := \begin{pmatrix} -0.15 & 0.8 & 0.7 \\ 0.1 & -0.8 & 0.2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |P1| = 0.86 \qquad \left|\begin{pmatrix} -0.8 & 0 & 0.3 \\ 0.3 & 0 & 0.4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0.41$$

$$b := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi := \mathrm{lsolve}(P1, b) \qquad \pi = \begin{pmatrix} 0.837 \\ 0.116 \\ 0.047 \end{pmatrix} \qquad \sum_{s=0}^{2} \pi_s = 1$$

$$\frac{0.41}{1.15}$$

$$1 - 0.257 - 0.357 = 0.386$$

$$U := I + P + P^2$$

$$U = \begin{pmatrix} 2.688 & 0.215 & 0.098 \\ 1.64 & 1.32 & 0.04 \\ 1.525 & 0.33 & 1.145 \end{pmatrix} \qquad \pi \cdot 15000 = \begin{pmatrix} 1.256 \times 10^4 \\ 1.744 \times 10^3 \\ 697.674 \end{pmatrix}$$

$$1000 U_{0,1} = 215$$

$$(30 \;\; 40 \;\; 35) \cdot \pi = 31.395$$

$$c := \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ -90 \end{pmatrix}$$

$$\pi \cdot c = 40$$

2.

3. Un mercato vede la presenza di 3 aziende, A, B, C. Tali aziende sono in competizione e cercano di accaparrarsi i potenziali 15000 clienti del mercato. Al termine di ogni periodo, l'indagine di mercato dice che se un cliende ha comperato dall'azienda A, allora rimane sofddisfatto con probabilità 0.7 e quindi riacquista da A. Dei clienti che non rimangono soddisfatti una volta acquistato in A, il 50% si dirigerà verso l'azienda B ed il rimanente verso la C. Dei clienti che acquistano dall'azienda B, invece, il 90% rimane soddisfatto. Dei non soddisfatti 1/3 si rivolgerà all'azienda A e 2/3 alla C. I clienti che si rivolgono all'azienda C rimangono soddisfatti con probabilità $P = 0.75$; dei non soddisfatti, il 75% si rivolgerà all'azienda A per il prossimo acquisto ed il rimanente all'azienda B.

   (a) Rappresentare il problema sottoforma di diagramma di stato

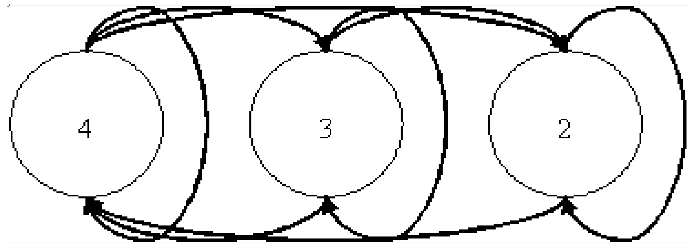
   (b) Determinare la corrispondente matrice di Markov

   (c) Al passare del tempo, quale sarà la quota di mercato di ciascuna azienda (probabilità limite)?

   (d) Quanti clienti avrà in media ciascuna azienda?

   (e) Se la spesa media dei clienti è di 30, 40 e 35 EUR (per cliente) per le tre aziende A, B e C rispettivamente, quanto si aspetta di incassare ciascuna azienda quanto al tendere di k all'infinito?

DIAGRAMMA DEGLI STATI



MATRICE DI TRANSIZIONE

$$P := \begin{pmatrix} 0.7 & .15 & .15 \\ .1 \cdot \frac{1}{3} & .9 & .1 \cdot \frac{2}{3} \\ 0.25 0.75 & 0.25 0.25 & 0.75 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.15 & 0.15 \\ 0.033 & 0.9 & 0.067 \\ 0.188 & 0.063 & 0.75 \end{pmatrix} \qquad \sum_{s=0}^{2} \left(P_{0,s}\right) = 1$$

PROBABILITA LIMITE

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A := P^T - I \qquad \left|P^T - I\right| = 0 \qquad A = \begin{pmatrix} -0.3 & 0.033 & 0.188 \\ 0.15 & -0.1 & 0.063 \\ 0.15 & 0.067 & -0.25 \end{pmatrix}$$

$$P1 := \begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} & A_{0,2} \\ A_{1,0} & A_{1,1} & A_{1,2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P1 = \begin{pmatrix} -0.3 & 0.033 & 0.188 \\ 0.15 & -0.1 & 0.063 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi := \mathrm{lsolve}(P1, b) \qquad \pi = \begin{pmatrix} 0.225 \\ 0.506 \\ 0.27 \end{pmatrix} \qquad \sum_{s=0}^{2} \pi_s = 1$$

(a)

QUOTA DI MERCATO

$$q := 15000\pi$$

$$q = \begin{pmatrix} 3.371 \times 10^3 \\ 7.584 \times 10^3 \\ 4.045 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

INCASSI

$$Spesa := (30 \quad 40 \quad 35)$$

$$q = \begin{pmatrix} 3.371 \times 10^3 \\ 7.584 \times 10^3 \\ 4.045 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$IncassoA := 30 \cdot q_0 \qquad IncassoA = 1.011 \times 10^5$$

$$IncassoB := 30 \cdot q_1 \qquad IncassoB = 2.275 \times 10^5$$

$$IncassoC := 30 \cdot q_2 \qquad IncassoC = 1.213 \times 10^5$$

(b)