

Università Carlo Cattaneo - LIUC
**Economia Industriale: esercizi su
OLIGOPOLIO**

Alessandro Fedele

20 Ottobre 2009

Informazioni generali

- Testo: Garavaglia C. (2006), *Economia Industriale: Esercizi e Applicazioni*, Carocci editore.
- Metodologia didattica:
 - ① 2-3 esercizi per lezione svolti nel minimo dettaglio;
 - ② **principio dell'interruzione**: per qualsiasi dubbio dovete interrompermi e chiedere; è provato empiricamente che più una lezione è interattiva, più gli studenti capiscono;
 - ③ **principio dell'esclusività**: se parlo io non parlate voi, se parlate voi non parlo io; è provato empiricamente che più una lezione è caotica, meno gli studenti capiscono.
- Lezione di oggi: Garavaglia C. (2006), *Economia Industriale: Esercizi* 5.2, 5.7 e 7.2.
- Altri esercizi consigliati: Garavaglia, cap. 5, esclusi 5.4 e 5.6, cap. 7.
- Ricevimento: giovedì ore 14-16, 4° piano della torre; per qualsiasi dubbio scrivetemi a fedele@eco.unibs.it.

Derivata della somma di funzioni potenza

- La derivata della funzione ax^n rispetto a x , con a costante, parametro e x variabile è

$$\frac{\partial ax^n}{\partial x} = anx^{n-1}.$$

- A noi interessano specialmente le funzioni di primo e secondo grado, ovvero $n = 1$ e $n = 2$:

$$\frac{\partial ax}{\partial x} = a \text{ e } \frac{\partial ax^2}{\partial x} = 2ax.$$

- La derivata di una costante, parametro è zero: se $f(x) = a$, $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0$.
- La derivata di una somma di funzioni è la somma delle derivate. Sia $f(x) = 1 + 2x + x^2$, allora $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0 + 2 + 2x$.
- Esempio: se i costi totali di un'impresa sono $8q$ dove q è la quantità che produce, i costi marginali sono pari alla derivata dei costi totali rispetto a q , ovvero 8.

Derivata di funzioni a più variabili

- La derivata di una funzione a due variabili $f(x_1, x_2)$ si calcola come segue.
- Si deriva prima la funzione rispetto a x_1 (ovvero si calcola la derivata parziale rispetto a x_1), nel qual caso x_2 si considera come una costante.
- Si deriva poi la funzione rispetto a x_2 (ovvero si calcola la derivata parziale rispetto a x_2), nel qual caso x_1 si considera come una costante.
- Esempio: $f(x_1, x_2) = 30x_1 - x_1^2 - x_2x_1 - 5x_1 - 10$.
- La derivata parziale rispetto a x_1 è

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 30 - 2x_1 - x_2 - 5.$$

- La derivata parziale rispetto a x_2 è

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = -x_1.$$

Esercizio 5.2 p. 71

- Supponiamo che l'industria siderurgica italiana consti di 3 imprese, 1, 2 e 3, che competono scegliendo simultaneamente la quantità da produrre di un bene omogeneo (concorrenza à la Cournot).
- Curva di domanda inversa è $p(Q) = 100 - 10Q$, dove $Q = q_1 + q_2 + q_3$.
- Le imprese sono simmetriche, ovvero tutte e tre hanno funzione di costi totali pari a $TC_i(q_i) = 20q_i$, $i = 1, 2, 3$.
- i) Calcolate quantità e prezzo di equilibrio nel mercato.
- Partiamo dal profitto impresa 1, definito come la differenza fra ricavi e costi totali:

$$\pi_1 = p(Q) q_1 - TC_1(q_1) = [100 - 10(q_1 + q_2 + q_3)] q_1 - 20q_1$$

- In Cournot l'impresa 1 sceglie la quantità q_1 che massimizza il suo profitto.
- Per trovarla calcoliamo la derivata di π_1 rispetto a q_1 e la poniamo uguale a zero:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 80 - 10(q_2 + q_3) - 20q_1 = 0.$$

- Risolviamo l'equazione sopra rispetto a q_1 :

$$q_1 = 4 - \frac{q_2 + q_3}{2},$$

così ottenendo la funzione di risposta ottima dell'impresa 1, ovvero la quantità ottima (= che massimizza il profitto) prodotta dall'impresa 1 in funzione della quantità prodotta dalle rivali, q_2 e q_3 .

- Ripetendo il procedimento per le imprese 2 e 3 (ovvero risolvendo rispetto a q_2 e q_3 le equazioni $\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 0$ e $\frac{\partial \pi_3}{\partial q_3} = 0$, rispettivamente), otteniamo le funzione di risposta ottima delle imprese 2 e 3: $q_2 = 4 - \frac{q_1 + q_3}{2}$ e $q_3 = 4 - \frac{q_1 + q_2}{2}$ (VERIFICARE!).
- Per calcolare quantità e prezzo di equilibrio nel mercato, mettiamo a sistema le tre funzioni di risposta ottima:

$$\begin{cases} 4 - \frac{q_2 + q_3}{2} = q_1 \\ 4 - \frac{q_1 + q_3}{2} = q_2 \\ 4 - \frac{q_1 + q_2}{2} = q_3 \end{cases}$$

- Risolviamo il sistema con il metodo di sostituzione: sostituisco $q_1 = 4 - \frac{q_2 + q_3}{2}$ nella seconda equazione e ottengo

$$4 - \frac{4 - \frac{q_2 + q_3}{2} + q_3}{2} = q_2.$$

- Risolvendo rispetto a q_2 :

$$\frac{8 - q_3}{3} = q_2. \quad (1)$$

- Sostituisco (1) nella prima equazione:

$$q_1 = 4 - \frac{\frac{8 - q_3}{3} + q_3}{2} = \frac{8 - q_3}{3}. \quad (2)$$

- Sostituisco (2) nella terza equazione:

$$4 - \frac{4 - \frac{8 - q_3}{3} + \frac{8 - q_3}{3}}{2} = q_3$$

- Risolvo rispetto a q_3 e ottengo 2.
- Sostituisco $q_3^* = 2$ in (2) e in (1) ottenendo $q_1^* = 2$ e $q_2^* = 2$, rispettivamente.

- Le tre imprese producono la stessa quantità. Ciò è dovuto alla loro simmetria: imprese simmetriche producono la stessa quantità in equilibrio à la Cournot (vedere soluzione esercizio 5.3).
- La quantità di equilibrio di mercato sarà dunque:

$$Q^* = q_1^* + q_2^* + q_3^* = 6.$$

- Il prezzo di equilibrio di mercato si ottiene sostituendo la quantità di equilibrio nella funzione di domanda di mercato:

$$p(Q^*) = 100 - 10Q^* = 100 - 10 \times 6 = 40.$$

- ii) Mostrate che le imprese, essendo simmetriche, ottengono lo stesso profitto in equilibrio.
- Il profitto di equilibrio della generica impresa $i = 1, 2, 3$ è

$$\pi_i^* = p(Q^*) q_i^* - TC_i(q_i^*) = (100 - 10(q_1^* + q_2^* + q_3^*)) q_i^* - 20q_i^*$$

- Dato $q_1^* = q_2^* = q_3^* = 2$, se sostituisco tali valori in π_i^* ottengo

$$\pi_i^* = (100 - 10 \times 6) 2 - 40 = 40$$

che è il profitto di equilibrio di tutte e tre le imprese.

- iii) L'impresa 1 riduce i costi totali di produzione a $TC_1(q_1) = 8q_1$ grazie a un'innovazione di processo. Calcolate quantità e prezzo del nuovo equilibrio di mercato.
- Dato che il profitto dell'impresa 1 cambia, cambierà pure la sua funzione di risposta ottima:

$$\pi_1 = p(Q) q_1 - TC_1(q_1) = (100 - 10(q_1 + q_2 + q_3)) q_1 - 8q_1.$$

- L'impresa 1 sceglie la quantità q_1 che massimizza il suo profitto.
- Per trovarla calcoliamo la derivata di π_1 rispetto a q_1 e la poniamo uguale a zero:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 92 - 10(q_2 + q_3) - 20q_1 = 0.$$

- Risolviamo l'equazione sopra rispetto a q_1 :

$$q_1 = 4.6 - \frac{q_2 + q_3}{2},$$

così ottenendo la funzione di risposta ottima dell'impresa 1.

- I profitti delle altre due imprese non sono cambiati, dunque nemmeno le loro funzioni di risposta ottima.
- Per calcolare il nuovo equilibrio del mercato, mettiamo a sistema le tre funzioni di risposta ottima:

$$\begin{cases} 4.6 - \frac{q_2 + q_3}{2} = q_1 \\ 4 - \frac{q_1 + q_3}{2} = q_2 \\ 4 - \frac{q_1 + q_2}{2} = q_3 \end{cases}$$

- Dal precedente procedimento sappiamo che imprese simmetriche, adesso solo la 2 e la 3, produrranno la stessa quantità in un equilibrio di Cournot: anticipiamo dunque $q_2 = q_3$ e lo sostituiamo nella prima equazione:

$$4.6 - \frac{2q_3}{2} = 4.6 - q_3 = q_1. \quad (3)$$

- Sostituiamo $q_2 = q_3$ e $q_1 = 4.6 - q_3$ nella terza equazione:

$$4 - \frac{4.6 - q_3 + q_3}{2} = q_3$$

e risolviamo rispetto a q_3 ottenendo $q_3^* = 1.7$.

- Dato $q_2 = q_3$ si ha $q_2^* = 1.7$.
- Sostituendo $q_3^* = 1.7$ in (3) otteniamo $q_1^* = 2.9$.
- Notate che l'impresa 1, che ha costi minori delle altre, produce di più!
- La quantità di equilibrio di mercato sarà dunque:

$$Q^* = q_1^* + q_2^* + q_3^* = 1.7 + 1.7 + 2.9 = 6.3.$$

- Il prezzo di equilibrio di mercato si ottiene sostituendo la quantità di equilibrio nella funzione di domanda di mercato:

$$p(Q^*) = 100 - 10Q^* = 100 - 63 = 37.$$

- iv) Mostrate che l'impresa 1, che ha introdotto l'innovazione, ottiene un profitto più alto delle altre in equilibrio.
- Il profitto di equilibrio dell'impresa 1 è

$$\pi_1^* = p(Q^*)q_1^* - TC_1(q_1^*) = (100 - 10(q_1^* + q_2^* + q_3^*))q_1^* - 8q_1^*$$

- Dato $q_1^* = 2.9$ e $q_2^* = q_3^* = 1.7$, se sostituisco tali valori in π_1^* ottengo

$$\pi_1^* = (100 - 10(6.3))2.9 - 8 \times 2.9 = 84.1.$$

che è il profitto di equilibrio dell'impresa 1.

- Il profitto di equilibrio delle imprese 2 e 3 è uguale e pari a

$$\pi_i^* = p(Q^*) q_i^* - TC_i(q_i^*) = (100 - 10(q_1^* + q_2^* + q_3^*)) q_i^* - 20q_i^*$$

con $i = 2, 3$.

- Dato $p(Q^*) = 37$ e $q_i^* = 1.7$, se sostituisco tali valori in π_i^* ottengo

$$\pi_i^* = 37 \times 1.7 - 20 \times 1.7 = 28.9$$

che è minore di π_1^* .

- v) I consumatori trarranno beneficio dall'introduzione dell'innovazione?
- Nel modello di Cournot il beneficio dei consumatori è una funzione crescente della quantità prodotta: più quantità più beneficio per i consumatori, perché potranno comprare maggiori quantità del bene ad un prezzo più basso.
- Dato che l'introduzione dell'innovazione fa salire la quantità di mercato da 6 a 6.3 e scendere il prezzo pagato per ciascuna unità da 40 a 37, la risposta è dunque sì: i consumatori trarranno beneficio dall'introduzione dell'innovazione.

Esercizio 5.7 p. 74

- Due imprese $i = 1, 2$ producono software nella stessa regione.
- Le imprese competono scegliendo simultaneamente il prezzo di un bene omogeneo (concorrenza à la Bertrand).
- I software sono dunque percepiti come omogenei (o perfetti sostituti) dai consumatori. Ciò significa che l'unica caratteristica che li distingue agli occhi del consumatore è il prezzo: l'impresa che fissa il prezzo minore serve l'intera domanda (nell'ipotesi che abbia capacità produttiva illimitata); se i prezzi sono uguali la domanda è divisa a metà fra le imprese.
- La curva di domanda del bene è $Q(p) = 30 - \frac{p}{2}$.
- La curva di domanda per l'impresa i è dunque

$$q_i(p_i, p_j) = \begin{cases} 30 - \frac{p_i}{2} & p_i < p_j \\ 0 & \text{per } p_i > p_j \\ \frac{30 - p_i}{2} & p_i = p_j \end{cases}$$

- Le imprese sono simmetriche, ovvero entrambe hanno funzione di costi totali pari a $TC_i(q_i) = 20q_i$. Il costo marginale $MC_i(q_i)$ è pari alla derivata $\partial TC_i(q_i) / \partial q_i = 20$.


- i) Rappresentare graficamente le funzioni di risposta ottima delle due imprese.
- La funzione di risposta ottima dell'impresa $i = 1, 2$ è, nel caso di concorrenza à la Bertrand, il prezzo p_i^* che massimizza il profitto dell'impresa i in funzione del prezzo fissato dall'impresa $j = 2, 1$.
- Il profitto dell'impresa i è la differenza fra i ricavi e i costi totali:

$$\pi_i(p_i, p_j) = q_i(p_i, p_j)(p_i - 20).$$

- Analiticamente la funzione di risposta ottima dell'impresa i è

$$p_i^* = \arg \max_{p_i} \pi_i(p_i, p_j).$$

- Per risolvere il problema non possiamo calcolare la derivata e metterla uguale a zero, perché $q_i(p_i, p_j)$ non è continua.
- Ragioniamo invece così: se l'impresa j fissa $p_j \leq 20$, dove 20 è il costo marginale dell'impresa i , MC_i , definito come la derivata del costo totale TC_i , l'impresa i non può fissare un prezzo minore di p_j altrimenti farebbe profitti negativi; fissa dunque $p_i^* = 20$.¹
- Se l'impresa j fissa $p_j > 20$, l'impresa i fissando $p_i^* = p_j - \varepsilon$, con ε molto piccolo, ottiene l'intera domanda di mercato al prezzo più alto possibile.

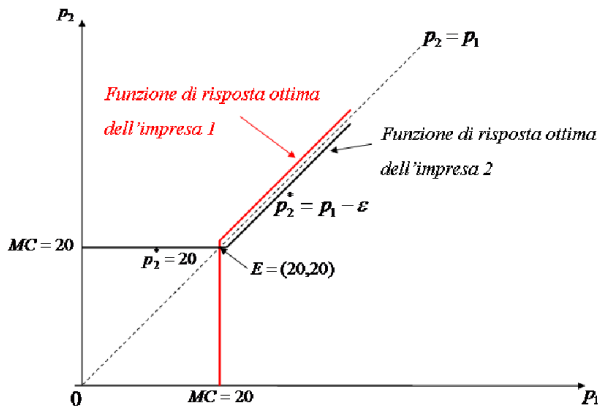
¹Anche un p_i^* maggiore è una risposta ottima. 

- Si ha dunque

$$p_i^* = \begin{cases} p_j - \varepsilon & \text{per } (p_M \geq) p_j > 20 \\ 20 & \text{per } p_j \leq 20 \end{cases}$$

dove 20 è il costo marginale dell'impresa i , MC_i , definito come la derivata del costo totale TC_i .

- Graficamente:



- ii) Calcolare quantità prodotta da ciascuna impresa, quantità totale e prezzo di equilibrio nel mercato.
- Il prezzo di equilibrio è dato dall'intersezione tra le funzioni di risposta ottima delle imprese 1 e 2 nel piano (p_1, p_2) , ovvero il punto E dove

$$p_1^* = p_2^* = 20.$$

- Sostituendo tali valori nella funzione di domanda di ciascuna impresa che, dato $p_1^* = p_2^*$, è

$$q_i(p_i, p_j) = \frac{30 - p_i}{2},$$

si ottiene la quantità prodotta da ciascuna impresa:

$$q_1^* = q_2^* = \frac{30 - \frac{20}{2}}{2} = 10.$$

- Sommando $q_1^* + q_2^*$ si ottiene la quantità totale: $Q^* = 20$.

- (iii) Che si intende per paradosso di Bertrand? Il paradosso di Bertrand consiste in quanto segue: le imprese fissano il prezzo pari al costo marginale, $p_1^* = p_2^* = 20$, come in concorrenza perfetta! Bastano due sole imprese per ottenere l'equilibrio concorrenziale.

- Sostituendo $p_1^* = p_2^* = 20$ nel profitto dell'impresa i

$$\pi_i(p_i, p_j) = q_i(p_i, p_j)(p_i - 20)$$

otteniamo

$$\pi_i^*(p_i^*, p_j^*) = \frac{30 - \frac{20}{2}}{2} (20 - 20) = 0 :$$

le imprese fanno profitti nulli.

- I prezzi sono pari al costo marginale, perché ciascuna impresa ha incentivo a ridurre il prezzo per prendersi l'intera domanda di mercato.
- (iv) Quali le cause del paradosso? Sono le tre ipotesi alla base del modello di concorrenza à la Bertrand : 1) beni omogenei 2) interazione non ripetuta tra le imprese (gioco one-shot) 3) capacità produttiva illimitata di ciascuna impresa.

- Supponiamo che l'impresa 1, dopo innovazione di processo, abbia la seguente funzione di costo totale: $TC_1(q_1) = 8q_1$.
- v) Calcolare i nuovi valori della quantità prodotta da ciascuna impresa, quantità totale e prezzo di equilibrio nel mercato.
- L'impresa 1 ha ora costi minori quindi può abbassare il prezzo in modo da espellere la rivale dal mercato ed operare come monopolista. La miglior strategia dell'impresa 1 è fissare $p_1^* = 20 - \varepsilon$. In tal caso infatti l'impresa 2 per avere domanda positiva dovrebbe fissare $p_2 \leq p_1^*$, ovvero $p_2 < 20$, incorrendo però in profitti negativi:

$$\pi_2(p_2, p_1^*) = q_2(p_2, p_1^*)(p_2 - 20) < 0.$$

- Dunque, con $p_1^* = 20 - \varepsilon$ l'impresa 2 preferisce non produrre.
- L'impresa 1 può soddisfare l'intera domanda di mercato (sempre nell'ipotesi di capacità produttiva illimitata):

$$q_1(p_1, p_2) = 30 - \frac{p_1^*}{2}.$$

- Si ha quindi $q_1^* = Q^* = 30 - \frac{20-\varepsilon}{2} \sim 20$.

- Per sincerarsi che $p_1^* = 20 - \varepsilon$ è il prezzo di equilibrio bisogna verificare che l'impresa 1 non abbia convenienza a fissarne uno diverso.
- Con $p_1^* = 20 - \varepsilon$ i profitti dell'impresa 1 sono pari a

$$\pi_1(p_1^*) = q_1^*(p_1^* - 8) = 20(20 - \varepsilon - 8) \sim 240.$$

- Ogni prezzo minore di p_1^* ridurrebbe il profitto dell'impresa 1, infatti se calcoliamo la derivata rispetto a p_1 di

$$\pi_1(p_1) = q_1(p_1 - 8) = \left(30 - \frac{p_1}{2}\right)(p_1 - 8)$$

otteniamo $34 - p_1$. Questo valore è positivo per $p_1 < 20 - \varepsilon$, l'intervallo che stiamo considerando. Ciò significa che se $p_1 \downarrow$ pure $\pi_1(p_1) \downarrow$.

- Ogni prezzo maggiore di 20 innescherebbe la concorrenza à la Bertrand con l'impresa 2, quindi, come visto prima, ci sarebbero profitti nulli per entrambe le imprese.
- Possiamo concludere che $p_1^* = 20 - \varepsilon$ è il prezzo di equilibrio perché l'impresa 1 non ha convenienza a fissarne uno diverso.

Esercizio 7.2 p. 103

- In un mercato operano n imprese simmetriche con costi totali pari a $TC_i(q_i) = 10q_i + 4$, $i = 1, \dots, n$.

- La funzione di domanda di mercato è $Q = S(30 - p)$, dove

$$Q = \sum_{i=1}^n q_i \text{ e } S \text{ misura la dimensione del mercato.}$$

- Le imprese competono à la Cournot.
- i) Determinate la funzione di risposta ottima della generica i -esima impresa.
- Abbiamo imparato che la funzione di risposta ottima di un'impresa che compete à la Cournot è la quantità ottima (= che massimizza il profitto) prodotta dall'impresa in funzione della quantità prodotta dalle rivali.
- Il profitto dell'impresa i è

$$\pi_i = p(Q)q_i - TC_i(q_i)$$

- dove $p(Q)$ si ottiene invertendo la funzione di domanda $p = 30 - \frac{Q}{S}$.

- Per evidenziare la variabile di scelta dell'impresa i , ovvero q_i , $Q = \sum_{i=1}^n q_i$ si può riscrivere come $Q = q_i + Q_{-i}$, dove Q_{-i} è la somma della quantità prodotta da tutte le altre imprese.
- Dunque $\pi_i = \left(30 - \frac{q_i + Q_{-i}}{S}\right) q_i - (10q_i + 4)$.
- Calcoliamo la derivata di π_i rispetto a q_i e la poniamo uguale a zero:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = 30 - \frac{2q_i}{S} - \frac{Q_{-i}}{S} - 10 = 0.$$

- Risolviamo l'equazione sopra rispetto a q_i così ottenendo la funzione di risposta ottima:

$$q_i = 10S - \frac{Q_{-i}}{2}. \quad (4)$$

- ii) Trovate la quantità ottima prodotta in equilibrio della i -esima impresa in funzione di n .
- Dato che le imprese sono simmetriche, tutte hanno la stessa funzione di risposta ottima (vedi esercizio 5.2). Ne segue che le n imprese producono la stessa quantità, che indichiamo con q^* e che sostituiamo nella equazione (4): $q^* = 10S - \frac{(n-1)q^*}{2}$.
- Risolvendo rispetto a q^* si ottiene $q^* = \frac{20S}{(n+1)}$.

- iii) Calcolate la quota di mercato dell' i -esima impresa e l'indice di concentrazione di Herfindahl.
- La quota di mercato dell'impresa i è data da

$$s_i = \frac{q_i}{Q}$$

dato che le imprese sono n e tutte producono la stessa quantità si ha $s_i = \frac{1}{n}$.

- L'indice di concentrazione di Herfindahl è dato da $H = \sum_{i=1}^n s_i^2$.
- Nel nostro caso:

$$H = n \left(\frac{1}{n} \right)^2 = \frac{1}{n}. \quad (5)$$

- iv) Determinate il numero di imprese operanti in equilibrio nel mercato in funzione di S .
- Il numero di equilibrio di imprese si determina attraverso la condizione di profitti nulli, tale per cui nessuna impresa attiva nel mercato desidera uscirvi e nessuna impresa esterna desidera entrarvi.

- In primis calcoliamo il profitto di equilibrio dell' i -esima impresa:

$$\pi_i^* = \left(30 - \frac{q_i^* + Q_{-i}^*}{S} \right) q_i^* - (10q_i^* + 4)$$

- Si ha $q_i^* = \frac{20S}{(n+1)}$ e $Q_{-i}^* = (n-1) \frac{20S}{(n+1)}$:

$$\begin{aligned} \pi_i^* &= \left(30 - \frac{n \frac{20S}{(n+1)}}{S} \right) \frac{20S}{(n+1)} - \left(10 \frac{20S}{(n+1)} + 4 \right) = \\ &\left(\frac{20}{n+1} \right)^2 S - 4 \end{aligned}$$

- Notate che π_i^* si riduce se n aumenta: più imprese significa più concorrenza, quindi i profitti calano.
- Risolviamo l'equazione $\pi_i^* = \left(\frac{20}{n+1} \right)^2 S - 4 = 0$ rispetto a n ottenendo:

$$n = 10\sqrt{S} - 1. \quad (6)$$

- v) Determinate il numero di imprese in equilibrio quando $S = 16$. Se $S = 32$ il numero di imprese raddoppia?
- Sostituendo $S = 16$ in (6) si ottiene $n = 10\sqrt{16} - 1 = 39$.
- Sostituendo $S = 32$ in (6) si ottiene $n = 10\sqrt{32} - 1 \sim 56$.
- Quando la dimensione del mercato raddoppia Il numero di imprese aumenta ma meno che proporzionalmente: più imprese significa più concorrenza, dunque profitti che vanno "presto" a zero.
- vi) Calcolate l'indice di concentrazione di Herfindahl nelle due situazioni sopra descritte: $S = 16$ e $S = 32$.
- Sostituendo $n = 39$ (ovvero il numero di imprese in equilibrio quando $S = 16$) in (5) si ottiene $H = \frac{1}{n} = \frac{1}{39} = 0.026$.
- Sostituendo $n = 56$ (ovvero il numero di imprese in equilibrio quando $S = 32$) in (5) si ottiene $H = \frac{1}{56} = 0.018$.
- Più imprese (simmetriche) nel mercato, minore concentrazione.