Statistica 28/10/09 Gruppo H-Z
Programma ed esercizi svolti

NOTA BENE: le domande evidenziate in giallo (che in stampa diventa grigio) sono domande aggiuntive rispetto a quelle viste in aula il giorno 28/10/09.

Coppie (X,Y) di variabili aleatorie (v.a.) *X* e *Y* considerate congiuntamente

Simbolo: (X,Y);

Significato: si ha una coppia (X,Y) di v.a. considerate congiuntamente quando per ogni valore x della v.a. *X* e per ogni valore y della v.a. *Y* è definita la probabilità $p_{XY}(x,y)$ di osservare congiuntamente ovvero insieme (ma non necessariamente nello stesso istante) x e y ovvero la coppia di valori (x,y); la probabilità $p_{XY}(x,y)$ si dice probabilità congiunta della coppia (x,y); la somma delle $p_{XY}(x,y)$ di tutte le coppie deve essere pari ad 1. **Funzione di probabilità congiunta della coppia di v.a.** (X,Y): é la funzione $p_{XY}(x,y)$ definita per ogni valore x della v.a. *X* e per ogni valore y della v.a. *Y* (e uguale a zero altrove).

Esercizio 1: Si consideri la coppia di v.a. (X,Y) con: *X* v.a. Bernoulliana di parametro $p=2/3$ ed *Y* v.a. Bernoulliana di parametro $p=2/3$, e con le seguenti probabilità congiunte: $p_{XY}(0,0)=2/9$, $p_{XY}(0,1)=1/9$, $p_{XY}(1,0)=1/9$, $p_{XY}(1,1)=5/9$. **Domanda 1**. Si scriva la funzione di probabilità congiunta della v.a. (X,Y) di cui sopra. **Domanda 2**. Si determini la probabilità che le due v.a. assumano lo stesso valore. **Domanda 3**. Si determini la probabilità che le due v.a. assumano valori diversi. **Domanda 4**. (4a) Si determini la probabilità che la v.a. *X* assuma valore 0; (4b) Si determini la probabilità che la v.a. *X* assuma valore 1. **Domanda 5**. Si verifichi che la v.a. *Y* nella coppia di v.a. (X,Y) di cui sopra sia Bernoulliana di parametro $p=2/3$.

Rappresentazioni grafiche di una coppia (X,Y) di v.a.

tabella a doppia entrata (significato del termine "v.a. *marginali*"), *grafico di dispersione* e *grafico a bolle*

Esercizio 2: Con riferimento all'Esempio/Esercizio 1 sopra: **Domanda 1**. Si rappresenti la coppia di v.a. (X,Y) sia mediante tabella a doppia entrata mettendo in evidenza le v.a. marginali sia mediante il grafico a bolle. **Domanda 2**. Si determini la probabilità dei delle due v.a. *X* e *Y* che appartengono alla retta $y=x$. **Domanda 3**. Si determini la probabilità dei valori delle due v.a. *X* e *Y* che appartengono alla retta $y=1-x$

Terne (X,Y,Z) ed *n*-ple $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ di v.a. considerate congiuntamente

Simboli: (X,Y,Z), $(X_1, X_2, \ldots X_n) \equiv \underline{X}$

Funzione di probabilità congiunta:

_ é la funzione $p_{XYZ}(x, y, z)$ definita per ogni valore x della v.a. *X*, per ogni valore y della v.a. *Y* e per ogni valore z della v.a. *Z* (e uguale a zero altrove);

_ é la funzione $p_{\underline{X}}(x_1, x_2, \ldots x_n)$ definita per ogni valore x_1 della v.a. X_1, per ogni valore x_2 della v.a. X_2, ecc. (e uguale a zero altrove).

Coppie ed *n*-ple di v.a. stocasticamente indipendenti

Data una coppia di v.a. (X,Y), le due v.a. *X* e *Y* sono <u>stocasticamente indipendenti</u> se si ha che:

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x)\, p_Y(y) \quad \forall (x, y) \text{ (e zero altrove)}$$

In generale, data una n-upla di v.a. $(X_1, X_2, \ldots X_n) \equiv \underline{X}$, le v.a. sono <u>stocasticamente indipendenti</u> se si ha che:

$$p_{\underline{X}}(x_1, x_2, \ldots x_n) = p_{X_1}(x_1)\, p_{X_2}(x_2) \ldots p_{X_n}(x_n) \quad \forall (x_1, x_2, \ldots x_n) \text{ (e zero altrove)}$$

Esercizio 3: Domanda 1. Si consideri l'Esempio/Esercizio 1 sopra e si dica se nella coppia di v.a. (X,Y) le v.a. *X* e *Y* sono stocasticamente indipendenti. **Domanda 2**. Data una coppia di v.a. (X,Y) con *X* v.a. Bernoulliana di parametro $p = 2/3$ ed *Y* v.a. Bernoulliana di parametro $p = 2/3$ stocasticamente indipendenti si determini la funzione di probabilità congiunta della coppia.

Covarianza di una coppia (X,Y) di v.a.

Simboli: $Cov(X,Y) \equiv \sigma_{XY}$;

Significato: è un indice il cui valore compreso fra $-\sigma_X \sigma_Y$ e $\sigma_X \sigma_Y$ dà una misura di quanto le due variabili sono prossime o meno dal trovarsi ad essere tra loro in una relazione lineare:

$$-\sigma_X \sigma_Y \le \sigma_{XY} \le \sigma_X \sigma_Y$$

(disuguaglianza di Cauchy-Schwarz), dove

$$\text{se } \sigma_{XY} = \sigma_X \sigma_Y \Rightarrow Y = bX + a \ \text{ con } \ b > 0$$

(cioè esiste una relazione lineare <u>esatta</u> tra le due v.a. *X* e *Y* <u>con pendenza *b* positiva</u>: al crescere di *X*, cresce *Y*)

$$\text{se } \sigma_{XY} = -\sigma_X \sigma_Y \Rightarrow Y = bX + a \ \text{ con } \ b < 0$$

(cioè esiste una relazione lineare <u>esatta</u> tra le due v.a. *X* e *Y* <u>con pendenza *b* negativa</u>: al crescere di *X*, decresce *Y*)

Formula:

$$\left.\begin{matrix} Cov(X,Y) \\ \sigma_{XY} \end{matrix}\right\} = E(XY) - E(X)E(Y)$$

dove (nel caso di v.a. discrete) $E(XY) = \sum_{\forall (x,y)} xy\, p(x, y)$ si dice momento primo <u>misto</u> (cioè congiunto) delle due v.a. *X* e *Y*. Si noti che: $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$, ovvero $\sigma_{XY} = \sigma_{YX}$.

Esercizio 4: Domanda 1. Si consideri la coppia di v.a. (X,Y) nell'Esempio/Esercizio 1 sopra, si calcoli $Cov(X,Y)$ e si commenti il risultato.

Coefficiente di correlazione lineare di una coppia (X,Y) di v.a.

Simboli: $\rho(X,Y) \equiv \rho_{XY}$;

Significato: è un indice il cui valore compreso fra -1 e 1 dà una misura di quanto le due variabili sono prossime o meno dal trovarsi ad essere tra loro in una relazione lineare:

$$-1 \le \rho_{XY} \le 1$$

$$\text{se } \rho_{XY} = 1 \Rightarrow Y = bX + a \ \text{ con } \ b > 0$$

(cioè esiste una relazione lineare <u>esatta</u> tra le due v.a. *X* e *Y* <u>con pendenza *b* positiva</u>: al crescere di *X*, cresce *Y*)

$$\text{se } \rho_{XY} = -1 \Rightarrow Y = bX + a \text{ con } b < 0$$

(cioè esiste una relazione lineare esatta tra le due v.a. X e Y con pendenza b negativa: al crescere di X, decresce Y)

Formula:

$$\left.\begin{array}{c}\rho(X,Y) \\ \rho_{XY}\end{array}\right\} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

($-1 \le \rho_{XY} \le 1$ si ottiene dividendo per $\sigma_X \sigma_Y$ i tre termini della disuguaglianza $-\sigma_X \sigma_Y \le \sigma_{XY} \le \sigma_X \sigma_Y$). Si noti che: $\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$ ovvero $\rho_{XY} = \rho_{YX}$.

Esercizio 5: Domanda 1. Si consideri la coppia di v.a. (X,Y) nell'Esempio/Esercizio 1 sopra (la cui $Cov(X,Y)$ è già stata calcolata nell'Esempio/Esercizio 4 sopra), si calcoli $\rho(X,Y)$ e si commenti il risultato. **Domanda 2**. Si consideri la coppia di v.a. (X,Y) nella Domanda 2 dell'Esempio/Esercizio 3 sopra, si calcoli $Cov(X,Y)$ e $\rho(X,Y)$ e si commenti il risultato.

Due proprietà importanti:

1° Proprietà. Le v.a. X e Y della coppia (X,Y) si dicono correlativamente indipendenti o non correlate (linearmente) se: $\rho_{XY} = 0$, ovvero $Cov(X,Y) = 0$.

2° Proprietà. Se le v.a. X e Y della coppia (X,Y) sono stocasticamente indipendenti, allora si dimostra che le due v.a. sono anche correlativamente indipendenti, ovvero si ha $\rho_{XY} = 0$ e $Cov(X,Y) = 0$ (non vale in generale la proposizione inversa).

Relazione lineare $Y = bX + a$ tra una coppia (X,Y) di v.a.

Simboli: $Y = bX + a$;

Significato: i valori possibili y della v.a. Y si ottengono dai valori possibili x della v.a. X facendo il calcolo con la formula $y = bx + a$.

Tre proprietà importanti: Se le v.a. X e Y della coppia (X,Y) sono tali che $Y = bX + a$, allora si dimostra:

1° Proprietà. $E(Y) = bE(X) + a$ ovvero $\mu_Y = b\mu_X + a$

2° Proprietà. $V(Y) = b^2 V(X)$ ovvero $\sigma_Y^2 = b^2 \sigma_X^2$

3° Proprietà. $\rho_{XY} = \pm 1$ ovvero $\sigma_{XY} = \pm \sigma_X \sigma_Y$ (segno "$+$" se $b > 0$ e segno "$-$" se $b < 0$, come già visto sopra)

Esercizio 6: Si consideri la coppia di v.a. (X,Y) tale che $Y = 2X + 1$ con la v.a. X che è uniforme discreta con parametro n = 3 con valori possibili $x \in \{1,2,3\}$. **Domanda 1**. Dopo aver calcolato $E(X)$ e $V(X)$, utilizzando tali valori si determini $E(Y)$ e $V(Y)$. **Domanda 2**. Si determinino i valori possibili y della v.a. Y nonché la probabilità $p(y)$ di tali valori. **Domanda 3**. Si ricalcoli direttamente $E(Y)$ e $V(Y)$ con quanto ottenuto nella risposta alla Domanda 2 e si controlli che i valori così ottenuti siano gli stessi di quelli ottenuti nella Domanda 1 utilizzando $E(X)$ e $V(X)$. **Domanda 4**. Si rappresenti la coppia (X,Y) delle v.a. X e Y di cui sopra sia mediante la tabella a doppia entrata (mettendo in evidenza le v.a. marginali) sia mediante il grafico a bolle. **Domanda 5**. Determinare $P(Y = 2X + 1)$. **Domanda 6**. Determinare σ_{XY} e ρ_{XY} e commentare i valori ottenuti.

Generalizzazione della relazione lineare $Y = bX + a$ fra due v.a. (X,Y) al caso di *n* v.a. $(X_1, X_2, \ldots X_n)$

Combinazione lineare di *n* v.a. $(X_1, X_2, \ldots X_n)$

$$Y = b_1 X_1 + b_2 X_2 + \cdots + b_n X_n + a = \sum_{t=1}^{n} b_t X_t + a$$

Consideriamo prima il caso più semplice ma importante di n=2 ovvero di Y combinazione lineare di (X_1, X_2)

$$Y = b_1 X_1 + b_2 X_2 + a$$

<u>1° Proprietà</u>: $\boxed{E(Y) = b_1 E(X_1) + b_2 E(X_2) + a}$

<u>2° Proprietà (caso particolare notevole)</u>: $\boxed{V(Y) = b_1^2 V(X_1) + b_2^2 V(X_2)}$ che vale solo se: $\sigma_{12} \equiv Cov(X_1, X_2) = 0$ o, il che è lo stesso, $\rho_{12} \equiv \rho(X_1, X_2) = 0$ e quindi in particolare quando (X_1, X_2) sono stoc. indip.

<u>2° Proprietà (caso generale)</u>: $\boxed{V(Y) = b_1^2 V(X_1) + b_2^2 V(X_2) + 2b_1 b_2 \sigma_{12}}$

Esercizi svolti

Esercizio 1: Si consideri la coppia di v.a. (X,Y) con: X v.a. Bernoulliana di parametro $p = 2/3$ ed Y v.a. Bernoulliana di parametro $p = 2/3$, e con le seguenti probabilità congiunte:

$$p_{XY}(0,0) = 2/9,\ p_{XY}(0,1) = 1/9,\ p_{XY}(1,0) = 1/9,\ p_{XY}(1,1) = 5/9$$

Domanda 1. Si scriva la funzione di probabilità congiunta della v.a. (X,Y) di cui sopra. **Domanda 2**. Si determini la probabilità che le due v.a. assumano lo stesso valore. **Domanda 3**. Si determini la probabilità che le due v.a. assumano valori diversi. **Domanda 4**. (4a) Si determini la probabilità che la v.a. X assuma valore 0; (4b) Si determini la probabilità che la v.a. X assuma valore 1. **Domanda 5**. Si verifichi che la v.a. Y nella coppia di v.a. (X,Y) di cui sopra sia Bernoulliana di parametro $p = 2/3$.

Domanda 1.

$$p(x,y) = \begin{cases} 2/9 & (x,y) = (0,0) \\ 1/9 & (x,y) = (0,1),(1,0) \\ 5/9 & (x,y) = (1,1) \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Domande 2, 3, 4 e 5.

Domanda 2		
x	y	p(x,y)
0	**0**	**2/9**
0	1	1/9
1	0	1/9
1	**1**	**5/9**

Domanda 3		
x	y	p(x,y)
0	0	2/9
0	**1**	**1/9**
1	**0**	**1/9**
1	1	5/9

$\boxed{P(X = Y) = 2/9 + 5/9 = 7/9}$ $\boxed{P(X \neq Y) = 1/9 + 1/9 = 2/9}$

(Si è risposto sommando le probabilità di tutte le coppie (x, y) che soddisfano la condizione richiesta cioè con $x = y$ per la Domanda 2 e con $x \neq y$ per la Domanda 3).

Domanda 4a		
x	y	p(x,y)
0	**0**	**2/9**
0	**1**	**1/9**
1	0	1/9
1	1	5/9

Domanda 4b		
x	y	p(x,y)
0	0	2/9
0	1	1/9
1	**0**	**1/9**
1	**1**	**5/9**

$\boxed{P(X = 0) = 2/9 + 1/9 = 3/9}$ $\boxed{P(X = 1) = 1/9 + 5/9 = 6/9}$

(Si è risposto sommando le probabilità di tutte le coppie (x, y) che soddisfano la condizione richiesta cioè con $x = 0$ per la Domanda 4a e con $x = 1$ per la Domanda 4b. Osservazione sulle risposte alle Domande 4a e 4b: si noti che la v.a. X è effettivamente Bernoulliana di parametro 6/9=2/3 come affermato all'inizio di questo Esempio/Esercizio 1).

Domanda 5		
x	**y**	p(x,y)
0	**0**	**2/9**
0	1	1/9
1	**0**	**1/9**
1	1	5/9

Domanda 5		
x	**y**	p(x,y)
0	0	2/9
0	**1**	**1/9**
1	0	1/9
1	**1**	**5/9**

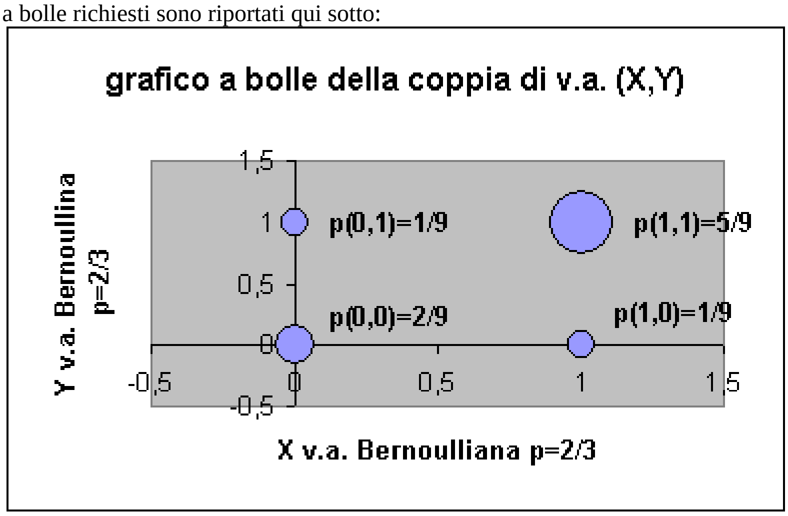
$\boxed{P(Y=0)=2/9+1/9=3/9}$ $\boxed{P(Y=1)=1/9+5/9=6/9}$

(Si è risposto sommando le probabilità di tutte le coppie (x,y) ….ecc.) Dunque la v.a. *Y* è Bernoulliana di parametro 6/9=2/3 (come già detto all'inizio di questo Esempio/Esercizio 1).

Esercizio 2: Con riferimento all'Esempio/Esercizio 1 sopra: **Domanda 1**. Si rappresenti la coppia di v.a. (X,Y) sia mediante tabella a doppia entrata mettendo in evidenza le v.a. marginali sia mediante il grafico a bolle. **Domanda 2**. Si determini la probabilità dei delle due v.a. *X* e *Y* che appartengono alla retta con pendenza $b=1$ ed intercetta $a=0$ cioè la retta $y=x$. **Domanda 3**. Si determini la probabilità dei valori delle due v.a. *X* e *Y* che appartengono alla retta $y=1-x=-x+1$ (cioè con pendenza $b=-1$ ed intercetta $a=1$).

Domanda 1. La tabella a doppia entrata ed il grafico a bolle richiesti sono riportati qui sotto:

X\Y	0	1	
0	2/9	1/9	**1/3**
1	1/9	5/9	**2/3**
	1/3	**2/3**	



Domande 2 e 3.

Domanda 2		
x	y	p(x,y)
0	**0**	**2/9**
0	1	1/9
1	0	1/9
1	**1**	**5/9**

Domanda 3		
x	y	p(x,y)
0	0	2/9
0	**1**	**1/9**
1	**0**	**1/9**
1	1	5/9

$\boxed{P(Y=X)=2/9+5/9=7/9}$ $\boxed{P(Y=1-X)=1/9+1/9=2/9}$

La risposta alla Domanda 2 è la stessa già vista alla Domanda 2 dell'Esempio/Esercizio 1. Nella risposta alla Domanda 3 nella retta $y=1-x$ si è posto $x=0$ ottenendo la coppia $(0,1)$ e si è poi posto $x=1$ ottenendo la coppia $(1,0)$, dopodiché si è sommata la probabilità di tali coppie. Alternativamente, si potevano tracciare le due rette $y=x$ e $y=1-x$ nel grafico a bolle di cui sopra (o di dispersione) vedendo così graficamente quali coppie (x,y) bisognava considerare per calcolare le probabilità. Possiamo infine osservare che è molto più alta la probabilità (7/9 ovvero il 77,78%) di osservare coppie (x,y) sulla retta $y=x$ invece che sulla retta $y=1-x$.

Esercizio 3: Domanda 1. Si consideri l'Esempio/Esercizio 1 sopra e si dica se nella coppia di v.a. (X,Y) le v.a. *X* e *Y* sono stocasticamente indipendenti. **Domanda 2**. Data una coppia di v.a. (X,Y) con *X* v.a. Bernoulliana di parametro $p=2/3$ ed *Y* v.a. Bernoulliana di parametro $p=2/3$ **e stocasticamente indipendenti,** si determini la funzione di probabilità congiunta della coppia (X,Y).

Domanda 1. Poiché per rispondere bisogna utilizzare sia le probabilità congiunte sia quelle delle v.a. marginali è allora utile considerare la tabella a doppia entrata già determinata nella Domanda 2 dell'Esercizio/Esempio 2 sopra.

X\Y	0	1	
0	2/9	1/9	1/3
1	1/9	5/9	2/3
	1/3	2/3	

Si tratta dunque di verificare se per <u>tutte</u> le coppie (x, y) si ha: $p_{XY}(x, y) = p_X(x)\, p_Y(y)$. Cominciamo con la prima coppia $(x, y) = (0,0)$:

$$\left.\begin{array}{l} p_{XY}(0,0) = 2/9 \\ p_X(0)\, p_Y(0) = (1/3)\cdot(1/3) = 1/9 \end{array}\right\} \Rightarrow p_{XY}(0,0) \neq p_X(0)\, p_Y(0) \Rightarrow \text{ le v.a. } X \text{ e } Y \text{ non sono stoc. indip.}$$

Domanda 2. Si può procedere sia con lo schema delle due colonne delle coppie sia con la tabella a doppia entrata determinando le probabilità congiunte con la formula $p_{XY}(x, y) = p_X(x)\, p_Y(y)$, dopodiché si scrive formalmente la funzione di probabilità congiunta richiesta.

Domanda 2				
x	y	p(x)	p(y)	**p(x,y)**
0	0	1/3	1/3	**1/9**
0	1	1/3	2/3	**2/9**
1	0	2/3	1/3	**2/9**
1	1	2/3	2/3	**4/9**

X\Y	0	1	
0			1/3
1			2/3
	1/3	2/3	

X\Y	0	1	
0	(1/3)*(1/3)	(1/3)*(2/3)	1/3
1	(2/3)*(1/3)	(2/3)*(2/3)	2/3
	1/3	2/3	

X\Y	0	1	
0	**1/9**	**2/9**	1/3
1	**2/9**	**4/9**	2/3
	1/3	2/3	

Funzione di probabilità congiunta richiesta allora è:

$$p(x, y) = \begin{cases} 1/9 & (x, y) = (0,0) \\ 2/9 & (x, y) = (0,1),(1,0) \\ 4/9 & (x, y) = (1,1) \\ 0 & altrove \end{cases}$$

La si confronti con quella ottenuta alla Domanda 1 dell'Esercizio/Esempio 1 in cui le due v.a. X e Y non sono stoc. indip. (come abbiamo verificato nella risposta alla Domanda 1 qui sopra). Si noti che le due v.a. X e Y (le v.a. "marginali") sono sempre le stesse due Bernoulliane di parametro 2/3 in entrambi i casi.

Esercizio 4: Domanda 1. Si consideri la coppia di v.a. (X, Y) nell'Esempio/Esercizio 1 sopra, si calcoli $Cov(X, Y)$ e si commenti il risultato.

Domanda 1. Poiché X e Y sono due v.a. Bernoulliane di parametro 2/3 si ha subito $E(X) = 2/3$ ed $E(Y) = 2/3$.

Inoltre il momento primo misto è:

$$E(XY) = \sum_{\forall(x,y)} xy\, p(x, y) = 0\cdot 0\cdot p(0,0) + 0\cdot 1\cdot p(0,1) + 1\cdot 0\cdot p(1,0) + 1\cdot 1\cdot p(1,1) = 5/9$$

In conclusione si ha: $\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) = 5/9 - (2/3)\cdot(2/3) = 1/9 > 0$

Commento (come vedremo più sotto esattamente alla stessa conclusione si giunge con il coefficiente di correlazione lineare): $\sigma_{XY} = 1/9$ indica che la correlazione lineare tra le v.a. X e Y **non è nulla** ed anzi è **positiva**; vediamo quanto le due v.a. sono lontane (o meno) dallo stare fra loro in una esatta relazione lineare. A tal fine dobbiamo calcolare il valore massimo di σ_{XY} che è dato dal prodotto $\sigma_X \sigma_Y$. Poiché X e Y sono due v.a. Bernoulliane di parametro 2/3 si ha subito:

$$V(X) = \sigma_X^2 = (1/3)\cdot(2/3) = 2/9 \text{ e } V(Y) = \sigma_Y^2 = (1/3)\cdot(2/3) = 2/9.$$

Quindi in conclusione si ha che: $\sigma_{XY} = \frac{1}{9} < \sigma_X \sigma_Y = \sqrt{\frac{2}{9}}\sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{2}{9}$

da cui si vede che *il valore di* $\sigma_{XY} = 1/9$ *sta esattamente a metà strada* fra la correlazione lineare nulla ($\sigma_{XY} = 0$) e la correlazione lineare positiva massima $\sigma_{XY} = \sigma_X \sigma_Y$ (che è 2/9 per le due v.a. X e Y considerate). Dunque si può concludere che le due v.a. hanno un grado medio di correlazione lineare positiva ovvero dipendono l'una dall'altra *mediamente* in modo *lineare crescente* (o con pendenza positiva).

Esercizio 5: Domanda 1. Si consideri la coppia di v.a. (X,Y) nell'Esempio/Esercizio 1 sopra (la cui $Cov(X,Y)$ è già stata calcolata nell'Esempio/Esercizio 4 sopra), si calcoli $\rho(X,Y)$ e si commenti il risultato. **Domanda 2**. Si consideri la coppia di v.a. (X,Y) nella Domanda 2 dell'Esempio/Esercizio 3 sopra (cioè il caso di X e Y Bernoulliane di parametro 2/3 e stocasticamente indipendenti), si calcoli $Cov(X,Y)$ e $\rho(X,Y)$ e si commenti il risultato.

Domanda 1. $\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{1/9}{\sqrt{\frac{2}{9}}\sqrt{\frac{2}{9}}} = \frac{1/9}{2/9} = \frac{1}{2} < 1$ (valore massimo di ρ_{XY})

Commento: *il valore di* $\rho_{XY} = 1/2$ *sta esattamente a metà strada* fra la correlazione lineare nulla ($\rho_{XY} = 0$) e la correlazione lineare positiva massima ($\rho_{XY} = 1$). Dunque si può concludere le due v.a. hanno un grado medio di correlazione lineare positiva ovvero dipendono l'una dall'altra *mediamente* in modo *lineare crescente* (o con pendenza positiva)

Domanda 2. Poiché X e Y sono due v.a. Bernoulliane di parametro 2/3 si ha subito, come prima, $E(X) = 2/3$ ed $E(Y) = 2/3$, ed anche $V(X) = \sigma_X^2 = (1/3)\cdot(2/3) = 2/9$ e $V(Y) = \sigma_Y^2 = (1/3)\cdot(2/3) = 2/9$. Inoltre il momento primo misto è: $E(XY) = \sum_{\forall(x,y)} xy\, p(x,y) = 0\cdot 0\cdot p(0,0) + 0\cdot 1\cdot p(0,1) + 1\cdot 0\cdot p(1,0) + 1\cdot 1\cdot p(1,1) = 4/9$

In conclusione si ha: $\sigma_{XY} = E(XY) - E(X)E(Y) = 4/9 - (2/3)\cdot(2/3) = 0$, $\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{0}{\sqrt{\frac{2}{9}}\sqrt{\frac{2}{9}}} = 0$

Commento: tra le due v.a. X e Y vi è correlazione nulla, non vi è cioè assolutamente nemmeno la più debole o sfumata tendenza o relazione lineare fra le due v.a. Ciò accade tutte le volte che le v.a. X e Y sono stocasticamente indipendenti (si veda la 2° Proprietà a pag. 2 in fondo).

Esercizio 6: Si consideri la coppia di v.a. (X,Y) tale che $Y = 2X + 1$ con la v.a. X che è uniforme discreta con parametro n = 3 con valori possibili $x \in \{1,2,3\}$. **Domanda 1**. Dopo aver calcolato $E(X)$ e $V(X)$, utilizzando tali valori si determini $E(Y)$ e $V(Y)$. **Domanda 2**. Si determinino i valori possibili y della v.a. Y nonché la probabilità $p(y)$ di tali valori. **Domanda 3**. Si ricalcoli direttamente $E(Y)$ e $V(Y)$ con quanto ottenuto nella risposta alla Domanda 2 e si controlli che i valori così ottenuti siano gli stessi di quelli ottenuti nella Domanda 1 utilizzando $E(X)$ e $V(X)$. **Domanda 4**. Si rappresenti la coppia (X,Y) delle v.a. X e Y di cui sopra sia mediante la tabella a doppia entrata (mettendo in evidenza le v.a. marginali) sia mediante il grafico a bolle. **Domanda 5**. Determinare $P(Y = 2X + 1)$. **Domanda 6**. Determinare σ_{XY} e ρ_{XY} e commentare i valori ottenuti.

Domanda 1. $E(X) = (1+3)/2 = 2$ e $V(X) = (9-1)/12 = 2/3$. Allora, poiché $Y = 2X + 1$, si ha

$$E(Y) = bE(X) + a = 2\cdot 2 + 1 = 5,\; V(Y) = b^2 V(X) = 4\cdot(2/3) = 8/3$$

Domanda 2.

x	**y=2x+1**	p(x)	p(x,y)=p(x)	=**p(y)**
1	**3**	1/3	1/3	**1/3**
2	**5**	1/3	1/3	**1/3**
3	**7**	1/3	1/3	**1/3**

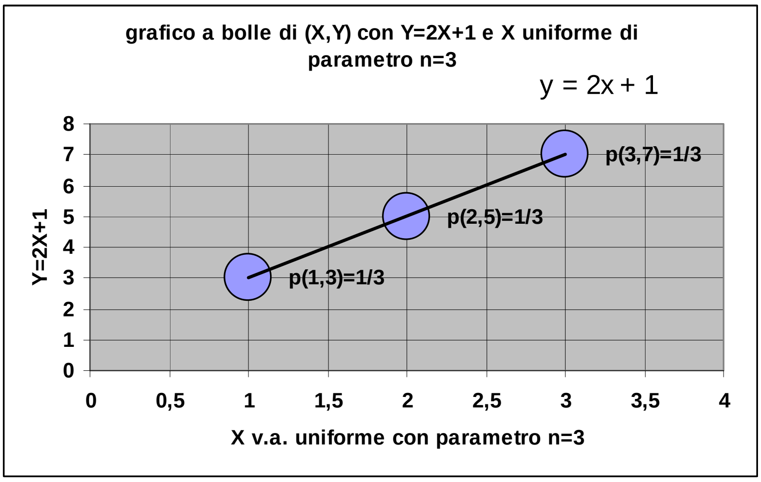
Domanda 3.

$$E(Y)=3\frac{1}{3}+5\frac{1}{3}+7\frac{1}{3}=\frac{15}{3}=\boxed{5},\ E\left(Y^2\right)=3^2\frac{1}{3}+5^2\frac{1}{3}+7^2\frac{1}{3}=\frac{83}{3},$$

$$V(Y)=E\left(Y^2\right)-E(Y)^2=\frac{83}{3}-\left(\frac{15}{3}\right)^2=\frac{249-225}{9}=\frac{24}{9}=\boxed{\frac{8}{3}}$$

Domanda 4.

X\Y=2X+1	3	5	7	
1	1/3	0	0	1/3
2	0	1/3	0	1/3
3	0	0	1/3	1/3
	1/3	1/3	1/3	



Domanda 5. $P(Y=2X+1)=$ somma delle probabilità delle coppie che soddisfano la condizione di stare sulla retta $Y=2X+1$. $P(Y=2X+1)=p(1,3)+p(2,5)+p(3,7)=3\cdot(1/3)=1$

Domanda 6. Abbiamo già calcolato $E(X)=2$ ed $E(Y)=5$. Inoltre, tenendo conto delle probabilità congiunte (si veda la Domanda 2 o la Domanda 4 sopra) il momento primo misto è:

$$E(XY)=\sum_{\forall(x,y)}xy\,p(x,y)=1\cdot3\cdot p(1,3)+2\cdot5\cdot p(2,5)+3\cdot7\cdot p(3,7)=3\frac{1}{3}+10\frac{1}{3}+21\frac{1}{3}=\frac{34}{3}$$

In conclusione si ha che la covarianza σ_{XY} è positiva raggiunge il suo valore massimo (per la v.a. X e Y qui considerate): $\sigma_{XY}=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{34}{3}-2\cdot5=\frac{4}{3}=\sigma_X\sigma_Y$. Infatti abbiamo già calcolato $V(X)=2/3$ e $V(Y)=8/3$ che danno proprio $\sigma_X\sigma_Y=\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{4}{3}$. Allo stesso modo si ha anche che il coefficiente di correlazione lineare ρ_{XY} raggiunge il suo valore massimo: $\rho_{XY}=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{4/3}{\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{8}{3}}}=\frac{4/3}{4/3}=1$. **Commento:** Tutto ciò <u>doveva</u> accadere perché tra le due v.a. c'è l'esatta relazione lineare $Y=2X+1$ con pendenza $b=2>0$.