Metodi Probabilistici Statistici e Processi Stocastici
1 Marzo 2004
Prova Generale

Nome:____

Cognome:____

Matricola:____

Il testo contiene 5 problemi. Scrivete la vostra risposta ufficiale nello spazio apposito. Giustificate la risposta scrivendo i calcoli ed il procedimento utilizzato o nei medesimi spazi o sul foglio di brutta. Risultati non giustificati non verranno considerati.

1. La variabile aleatoria X è caratterizzata dalla funzione caratteristica:

$$\Psi(t) = e^{3t} + 2t + 5 \tag{1}$$

   (a) Determinate il valore atteso di X.
   (b) Determinate la varianza di X.

____

(a)

$$\Psi'(t) = 3e^{3t} + 2 \tag{2}$$

$$\Psi'(0) = 3e^{0} + 2 = 5 \tag{3}$$

(b)

$$\Psi''(t) = 9e^{3t} \tag{4}$$

$$\Psi''(0) = 9 \tag{5}$$

$$V\left[X\right] = \Psi''(0) - \left[\Psi'(0)\right]^2 = -16.0 \tag{6}$$

: non può essere una funzione caratteristica...!

2. La probabilità di un guasto di qualsiasi tipo di un ascensore durante una settimana di lavoro è p. Dopo sei mesi di lavoro (26 settimane), si sono verificate 2 settimane con guasti.

   (a) Determinate lo stimatore di massima verosimiglianza per p

   (b) Supponendo una distribuzione a priori beta con parametri $r = 2$ e $q = 3$ con p tra 0 e 1, determinate lo stimatore bayesiano di p. (Sugg.: per una variabile con distribuzione $\beta(r', q')$ il valore atteso è dato da $\frac{r'}{r'+q'}$)

   (c) Supponendo di partire da una distribuzione uniforme, cosa otterreste?

(a)

$$l(p) = \binom{26}{2} p^2 (1-p)^{24} \tag{7}$$

$$g(p) = \ln l(p) \tag{8}$$

$$\frac{d}{dp} g(p) = 2 \frac{-1 + 13p}{p(-1+p)} \tag{9}$$

$$2 \frac{-1 + 13p}{p(-1+p)} = 0 \tag{10}$$

$p = \frac{1}{13} = 7.69 \times 10^{-2}$

(b)

$$l(p) = \binom{26}{2} p^2 (1-p)^{24} \tag{11}$$

Distribuzione a priori:

$$m(p) = \frac{p(1-p)^2}{\int_0^1 p(1-p)^2 dp} \tag{12}$$

Distribuzione a posteriori:

$$l(p)m(p) = \binom{26}{2} \frac{p^3 (1-p)^{26}}{\int_0^1 p (1-p)^2 \, dp} \tag{13}$$

$$w(p) = \frac{(1-p)^{26} p^3}{\int_0^1 x^3 (1-x)^{26} \, dx} \tag{14}$$

$$E[p] = \frac{2+2}{3+24+4} = .13 \tag{15}$$

(c) $E[p] = \frac{1+2}{1+24+3} = \frac{3}{28} = .107$

3. I clienti arrivano al vostro distributore con tasso

$$\lambda = 20[1/ora] \tag{16}$$

(a) Quanto è il tempo medio di attesa tra un arrivo e l'altro?

(b) Quanto occorre attendere in media per il $150mo$ arrivo?

(c) Se ad ogni arrivo corrisponde una spesa media con distribuzione normale, di valor medio $35EUR$ e deviazione standard $5EUR$, quanto incassa in media al giorno il vostro distributore (supponete 8 ore lavorative)?

(a) Distribuzione esponenziale:

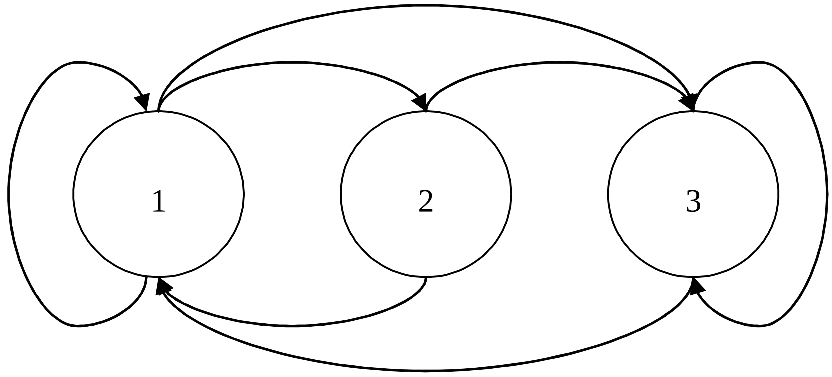
$$E[t] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{20} ora \tag{17}$$

(b) Distribuzione gamma:

$$E[T_{150}] = \frac{N}{\lambda} = \frac{150}{20} = 7.5 ore \tag{18}$$

(c)

$$c = 35 \cdot 20 \cdot 8 = 5600 \tag{19}$$



4. Un sistema di allarme viene ispezionato periodicamente a tempi discreti ($k = 1, 2, ...n.$) Dopo l'ispezione il sistema può essere funzionante (1), parzialmente funzionante (2) o rotto (3). Se il sistema è funzionante prima della manutenzione, allora un errore nell'ispezione lo restituisce rotto parzialmente con probabilità $p_{12} = 0.01$ e del tutto con probabilità $p_{13} = 0.005$. Se è parzialmente rotto, allora la manutenzione lo restituisce funzionante con probabiltà $p_{21} = 0.95$, e lo disabilita del tutto con probabilità $p_{23} = 0.025$. Se è rotto del tutto allora la manutenzione lo ripara completamente ($p_{31} = 0.99$) o, se il guasto non viene rilevato, lo lascia completamente rotto.

   (a) Disegnare il diagramma degli stati del sistema

   (b) Determinate la corrispondente matrice di Markov

   (c) Trovate, se esiste, la distribuzione limite

(a) 3 stati:

(b) Stato 1, $p_{11} = 1 - 0.01 - 0.005 = .985$. Stato 2, $p_{22} = 1 - 0.95 - 0.025 = 0.025$

$$\begin{array}{ccc} .985 & 0.01 & 0.005 \\ .95 & 0.025 & 0.025 \\ 0.99 & 0 & 0.01 \end{array} \tag{20}$$

(c) Matrice limite:

$$P = \begin{array}{ccc} .985 & 0.01 & 0.005 \\ .95 & 0.025 & 0.025 \\ 0.99 & 0 & 0.01 \end{array} \tag{21}$$

$$P^T = \begin{array}{ccc} .985 & .95 & .99 \\ .01 & .025 & 0 \\ 5.0 \times 10^{-3} & .025 & .01 \end{array} \tag{22}$$

$$I = \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \tag{23}$$

$$P^T - I = \begin{matrix} -.015 & .95 & .99 \\ .01 & -.975 & 0 \\ 5.0 \times 10^{-3} & .025 & -.99 \end{matrix} \quad (24)$$

$$\det(P^T - I) = 0 \quad (25)$$

$$\begin{matrix} -.015 & .95 & .99 \\ .01 & -.975 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \quad (26)$$

Distribuzione limite: $\begin{matrix} .985 \\ 1.01 \times 10^{-2} \\ 5.23 \times 10^{-3} \end{matrix}$

1. Una serie di rilevazioni statistiche sul consumo di energia elettrica (v) e la crescita del prodotto interno lordo (PIL, simbolo λ) porta ai seguenti dati:

$$\begin{array}{cc} v & \lambda \\ 50000 & 1.3\% \\ 53000 & 0.5\% \\ 54000 & 0.5\% \\ 55000 & .8\% \end{array} \tag{27}$$

   (a) Qual è il coefficiente di correlazione v e λ?

   (b) Se quest'anno si prevede un incremento del PIL 1.2%, quanto vi attendente sarà l'aumento dei consumi di energia elettrica?

   (c) E' un risultato logico oppure è il caso di aumentare il numero di rilevazioni?

(a) Soluzione. $D = \begin{array}{cc} 50000 & 1.3 \\ 53000 & 0.5 \\ 54000 & 0.5 \\ 55000 & .8 \end{array}$, Correlation matrix: $\begin{array}{cc} 1.0 & -.736 \\ -.736 & 1.0 \end{array}$

(b) $\begin{array}{cc} v & \lambda \\ 50000 & 1.3 \\ 53000 & 0.5 \\ 54000 & 0.5 \\ 55000 & .8 \end{array}$ Curva di regressione:

$$v(\lambda) = 5.63 \times 10^4 - 4.21 \times 10^3 \cdot \lambda \tag{28}$$

Ne segue:

$$v(1.2) = 5.12 \times 10^4 \tag{29}$$

(c) Di solito ad una crescita economica si accompagna una crescita dei consumi elettrici, ceteris paribus. Di conseguenza un coefficiente di correlazione negativo potrebbe significare una mancanza di dati (ad esempio 5 anni potrebbero essere pochi o essere una singolarità)