

Metodi Probabilistici Statistici e Processi Stocastici

12 Novembre 2004

I prova intermedia

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola: _____

Scrivete la vostra risposta ufficiale nello spazio apposito. Giustificate la risposta scrivendo i calcoli ed il procedimento utilizzato o nei medesimi spazi o sul foglio di brutta. Risultati non giustificati non verranno considerati.

1. La variabile aleatoria X è caratterizzata dalla funzione:

$$\Psi(t) = e^{-4t^3 - 3t} \quad (1)$$

- (a) Determinate il valore atteso di X .
- (b) Determinate la varianza di X .
- (c) $\Psi(t)$ può essere una funzione caratteristica, dati i primi due risultati?

(a)

$$\Psi'(t) : (-12t^2 - 3) e^{-3t - 4t^3} \quad (2)$$

$$\Psi'(0) : -3 \quad (3)$$

(b)

$$\Psi''(t) : (-12t^2 - 3)^2 e^{-3t - 4t^3} - 24te^{-3t - 4t^3} \quad (4)$$

$$\Psi''(0) : 9 \quad (5)$$

$$V[X] = \Psi''(0) - [\Psi'(0)]^2 = 0 \quad (6)$$

- (c) No, perchè varianza nulla implica tutti i momenti di ordine superiore nulli.

2. State realizzando un software per predire il profitto della vostra azienda, basandovi sul numero di ordinativi. Innanzitutto sapete che il profitto della vostra azienda (y) varia in funzione del numero giornaliero di nuovi ordinativi come segue:

$$y(x) = x^2 - 2 \quad (7)$$

dove X è una variabile aleatoria distribuita come segue:

$$f(x, \theta) = \begin{cases} A \cdot \theta \cdot x^{\theta-1} & \text{if } 0 < x < 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

- (a) Determinate A
- (b) Supponendo una distribuzione a priori beta con parametri $r = 2$ e $q = 3$ con p tra 0 e 1, qual è la distribuzione a posteriori di p ?
- (c) Determinate lo stimatore bayesiano di p . (Sugg.: per una variabile con distribuzione $\beta(r', q')$ il valore atteso è dato da $\frac{r'}{r'+q'}$)
- (d) Supponendo di partire da una distribuzione uniforme, cosa otterreste?

- (a) Non applicabile perchè non ci sono dati (si richiede $k \neq 0$)
- (b) $4 \cdot 2 \cdot 365 = 2920$

$$l(p) = \binom{2920}{0} p^0 (1-p)^{2920} \quad (9)$$

Distribuzione a posteriori:

$$w(p) = \frac{\binom{2920}{0} (1-p)^{2920} p (1-p)^2}{\int_0^1 \binom{2920}{0} (1-p)^{2920} dp} = \frac{(1-p)^{2922} p}{\int_0^1 (1-p)^{2922} dp} \quad (10)$$

- (c) $E[p] = \frac{2}{2+2993} = \frac{2}{2995} = 6.677\,796\,33 \times 10^{-4}$
- (d) $E[p] = \frac{1}{1+2993} = 3.340\,013\,36 \times 10^{-4}$

3. I clienti arrivano al vostro negozio con tasso

$$\lambda = 10[1/ora] \quad (11)$$

- (a) Quanto è il tempo medio di attesa tra un arrivo e l'altro?
- (b) Quanti giorni occorrono per il 150^{mo} arrivo, se tenete aperto il negozio 8 ore?
- (c) Se il vostro costo giornaliero di gestione è pari a 2000, ed un cliente spende in media 25, riuscite ad superare il break-even o dovete tenere aperto per più di 8 ore?

(a) Distribuzione esponenziale:

$$E[t] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{10}ore = 6 \text{ min} \quad (12)$$

(b) Distribuzione gamma:

$$E[T_{150}] = \frac{N}{\lambda} = \frac{150}{10} = 15ore \quad (13)$$

più o meno due giorni di lavoro

(c)

$$Ric = 25 \cdot 10 \cdot 8 = 2000 \quad (14)$$

Occorre aumentare le ore lavorative.

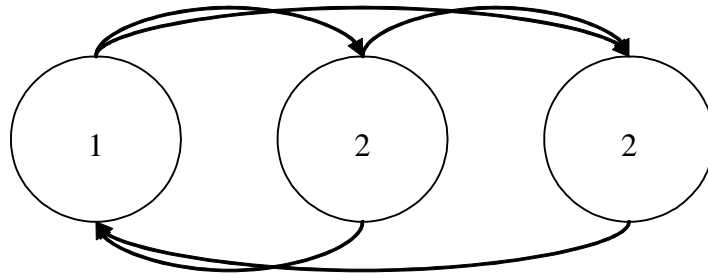
4. Un sistema di produzione viene ispezionato periodicamente a tempi discreti ($k = 1, 2, \dots, n$). Dopo l'ispezione il sistema può essere perfettamente funzionante (1), parzialmente funzionante (2) o rotto (3). Se il sistema è funzionante a $k-1$, allora allora un errore nell'ispezione lo restituisce rotto parzialmente con probabilità $p_{12} = 0.02$ e del tutto con probabilità $p_{13} = 0.01$. Se è parzialmente rotto, allora la manutenzione lo restituisce funzionante con probabilità $p_{21} = 0.90$, e lo disabilita del tutto con probabilità $p_{23} = 0.05$. Se è rotto del tutto allora la manutenzione lo riporta o del tutto riparato ($p_{31} = 0.9$) o, se il guasto non viene rilevato, lo lascia rotto.

- (a) Disegnare il diagramma degli stati del sistema
- (b) Determinate la corrispondente matrice di Markov
- (c) Trovate, se esiste, la distribuzione limite

Se il sistema produce un profitto pari a 100 quando è perfettamente operante, un profitto pari a 50 quando è parzialmente operante, e una perdita di 50 quando è rotto, conviene investire nel sistema, ovvero:

- (d) Per $k \rightarrow \infty$, qual è il profitto o la perdita media generata dal sistema?

- (a) 3 stati:



(b)
$$\begin{bmatrix} .97 & .02 & .01 \\ .9 & .05 & .05 \\ .9 & 0 & .1 \end{bmatrix}$$

- (c)

$$P = \begin{bmatrix} .97 & .02 & .01 \\ .9 & .05 & .05 \\ .9 & 0 & .1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$P^T = \begin{pmatrix} 0.97 & 0.9 & 0.9 \\ 0.02 & 0.05 & 0 \\ 0.01 & 0.05 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.97 & 0.9 & 0.9 \\ 0.02 & 0.05 & 0 \\ 0.01 & 0.05 & 0.1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$A - I \quad (18)$$

$$: \begin{pmatrix} -0.03 & 0.9 & 0.9 \\ 0.02 & -0.95 & 0 \\ 0.01 & 0.05 & -0.9 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - I) \quad (19)$$

$$\begin{pmatrix} -0.03 & 0.9 & 0.9 & x_1 & 0 \\ 0.02 & -0.95 & 0 & x_2 & 0 \\ 0.01 & 0.05 & -0.9 & x_3 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (20)$$

$$\begin{matrix} -0.03 & 0.9 & 0.9 & x_1 & -0.03x_1 + 0.9x_2 + 0.9x_3 = 0 \\ 0.02 & -0.95 & 0 & x_2 & 0.02x_1 - 0.95x_2 = 0 \\ 0.01 & 0.05 & -0.9 & x_3 & 0.01x_1 + 0.05x_2 - 0.9x_3 = 0 \end{matrix}$$

$$-0.03x_1 + 0.9x_2 + 0.9x_3 = 0$$

$$0.02x_1 - 0.95x_2 = 0$$

$$0.01x_1 + 0.05x_2 - 0.9x_3 = 0$$

$$0.02x_1 - 0.95x_2 = 0, \text{ Solution is: } [x_1 = 81.4285714x_3, x_2 = 1.71428571x_3]$$

$$0.01x_1 + 0.05x_2 - 0.9x_3 = 0$$

$$81.4285714x_3 + 1.71428571x_3 + x_3 = 1, \text{ Solution is: } 1.18845501 \times 10^{-2}$$

$$81.4285714 \cdot 1.18845501 \times 10^{-2} = 0.967741936$$

$$1.71428571 \cdot 1.18845501 \times 10^{-2} = 2.03735144 \times 10^{-2}$$

$$1.18845501 \times 10^{-2} = 1.18845501 \times 10^{-2}$$

$$0.967741936$$

$$1. \text{ (a) } 100 \quad 50 \quad -50 \quad 2.03735144 \times 10^{-2} = 97.1986418$$

$$1.18845501 \times 10^{-2}$$

2. Una serie di rilevazioni statistiche sull'aumento dei prezzi degli alimentari (v) e l'inflazione (simbolo λ) porta ai seguenti dati:

v	λ	
10%	2.2%	
15%	2.1%	(21)
5%	2.0%	
8%	2.1%	

- (a) Qual è il coefficiente di correlazione v e λ ?
- (b) Se quest'anno si prevede un incremento dei prezzi degli alimentare pari al 6%, quanto vi attendente sarà l'aumento nell'inflazione?
- (c) E' un risultato logico?

	10%	2.2%			
(a)	15%	2.1%	, Correlation matrix:	1.0	0.485 642 931
	5%	2.0%		0.485 642 931	1.0
	8%	2.1%			

	v	λ
(b)	0.10	0.022
	0.15	0.021
	0.05	0.020
	0.08	0.021

$$\lambda(v) = 9.433\,962\,26 \times 10^{-3}v + 2.010\,377\,36 \times 10^{-2} \quad (22)$$

Ne segue:

$$\lambda(0.06) =: 2.07 \times 10^{-2} \quad (23)$$

- (c) Sì.