

Metodi Probabilistici Statistici e Processi Stocastici
2 Febbraio 2007 Seconda Prova Intermedia

Cognome: _____

Nome: _____

Matricola: _____

Il testo contiene 4 problemi. Scrivete la vostra risposta ufficiale nello spazio apposito. Giustificate la risposta scrivendo i calcoli ed il procedimento utilizzato o nei medesimi spazi o sul foglio di brutta. Risultati non giustificati non verranno considerati.

1 Le variabili aleatorie X ($0 < X < 2$) e Y ($0 < Y < 1$) sono caratterizzate dalla densità congiunta:

$$f_{XY}(x, y) = k(x + y) \quad \#$$

1.a Determinate k .

1.b Determinate la densità marginale $f_Y(y)$

1.c X e Y sono indipendenti?

1.a

$$f(x, y) = k(x + y) \quad \#$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^2 f(x, y) dx \right) dy = 3k \quad \#$$

::

$$k = 1/3 \quad \#$$

1.b

$$\int_0^1 f(x, y) dy = \frac{1}{2}k + kx \quad \#$$

$$\int_0^1 f(x, y) dy = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x \quad \#$$

1.c No

2 I tempi di arrivo dei clienti nel vostro punto vendita Lamborghini sono distribuiti con una distribuzione di Poisson con tasso λ , misurato in arrivi alla settimana. La probabilità che un cliente acquisti è p .

2.a Quanto tempo occorre tra due arrivi consecutivi?

2.b Quanto tempo passa in media tra due vendite consecutive?

2.c Se il costo associato ad ogni arrivo di cliente è C ed il guadagno associato ad ogni vendita è G , quanto vi attendete di guadagnare in un anno (supponete di tenere aperto 52 settimane all'anno — avete un socio ...—)?

2.d Quale deve essere la relazione tra C e G affinché non andiate in perdita?

2.a $\frac{1}{\lambda}$

2.b $\frac{1}{\lambda p}$

2.c

$$52\lambda pG - 52\lambda C = 52\lambda(pG - C) \quad \#$$

2.d

$$(pG = C) \quad \#$$

3 Siete manager di un'azienda e vi occupate di qualità. I componenti che gestite hanno tempi di guasto Poisson, con tasso $\lambda = \frac{10}{mese}$. Avete stimato che ad ogni guasto è associato un danno monetario X per l'azienda distribuito secondo una distribuzione gamma di parametri $\alpha_X = 10$ e $\beta_X = 0.1$. L'azienda prevede un accantonamento annuale per danni di qualità. Quanto dovete suggerire di accantonare per evitare la perdita? (Sugg.: si tratta di un processo di Poisson composto....)

$$\lambda \frac{\alpha_X}{\beta_X} t = 10 \frac{10}{0.1} 12 = 12000.0$$

#

4 Una squadra di calcio può essere in grande forma, in discreta forma o in cattiva forma. Se è in grande forma, la probabilità che vi resti è 0.5, che passi in discreta forma è 0.5. Se è in discreta forma, passa a grande forma con probabilità 0.3, resta in discreta forma con 0.5, e con la restante probabilità va in cattiva forma. Se è in cattiva forma vi resta con probabilità 0.3, altrimenti passa in discreta forma.

4.1 Disegnate il diagramma di Markov per il sistema

4.2 Determinate la corrispondente matrice di transizione

4.3 Determinate la probabilità limite per il sistema.

4.4 Se il vettore dei costi è

$$c = \begin{bmatrix} -10 \\ -20 \\ -50 \end{bmatrix} \quad \#$$

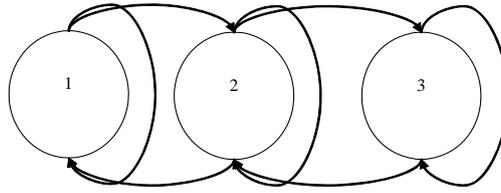
e se la squadra parte dalla forma discreta, quanto vi aspettate di perdere dopo 12 mesi? (Sugg.:

$$M = \begin{pmatrix} 5.135 & 6.286 & 1.579 \\ 3.771 & 7.346 & 1.882 \\ 3.317 & 6.589 & 3.095 \end{pmatrix} \quad \Big| \quad \blacksquare$$

)

4.5 E all'infinito?

DIAGRAMMA DEGLI STATI



MATRICE DI TRANSIZIONE

$$P := \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$$

PROBABILITA LIMITE

$$P^T = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.7 \\ 0 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|P^T - I| = 0 \quad A := P^T - I \quad A = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0.7 \\ 0 & 0.2 & -0.7 \end{pmatrix} \quad |A| = 0$$

$$P1 := \begin{pmatrix} -0.5 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0.7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|P1| = 0.66$$

$$\left| \begin{pmatrix} -0.8 & 0 & 0.3 \\ 0.3 & 0 & 0.4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| :$$

$$b := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi := \text{lsolve}(P1, b) \quad \pi = \begin{pmatrix} 0.318 \\ 0.53 \\ 0.152 \end{pmatrix} \quad \sum_{s=0}^2 \pi_s = 1$$

$$1 - 0.257 - 0.357 = 0.386$$

$$U := I + P + P^2$$

$$U = \begin{pmatrix} 1.9 & 1 & 0.1 \\ 0.6 & 2.04 & 0.36 \\ 0.21 & 1.26 & 1.53 \end{pmatrix}$$

$$\pi \cdot 15000 = \begin{pmatrix} 4.773 \times 10^3 \\ 7.955 \times 10^3 \\ 2.273 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$1000 U_{0,1} = 1 \times 10^3$$

$$(30 \ 40 \ 35) \cdot \pi = 36.061$$

$$c := \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ -50 \end{pmatrix}$$

$$\pi \cdot c = -21.364$$

$$\sum_{n^s} \begin{pmatrix} 5.135 & 6.286 & 1.579 \\ 2.771 & 7.246 & 1.807 \end{pmatrix}$$