

INGEGNERIA GESTIONALE
corso di Fisica Generale

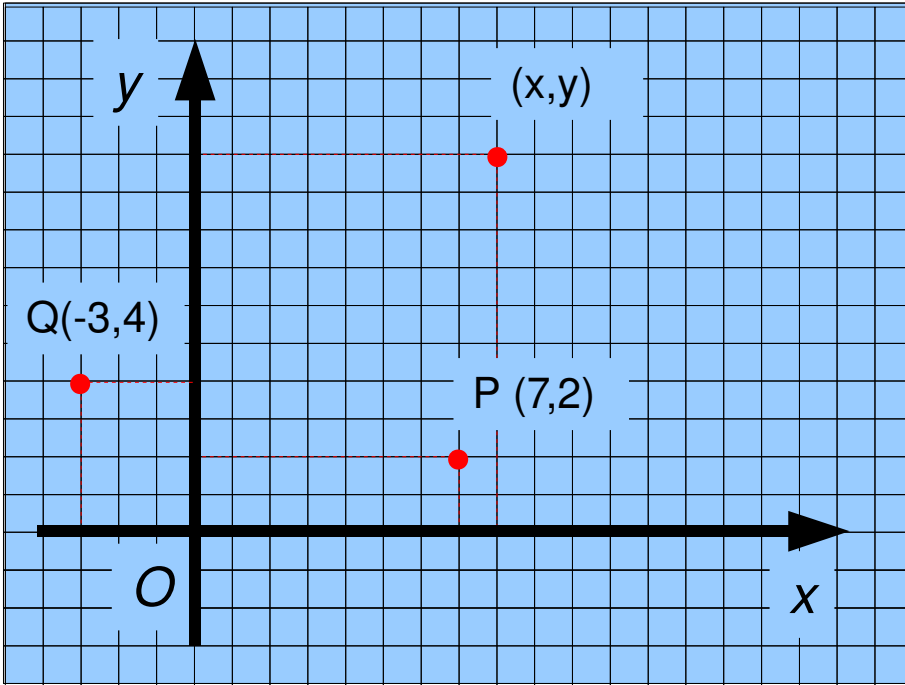
Prof. E. Puddu

LEZIONE DEL 23 SETTEMBRE 2008

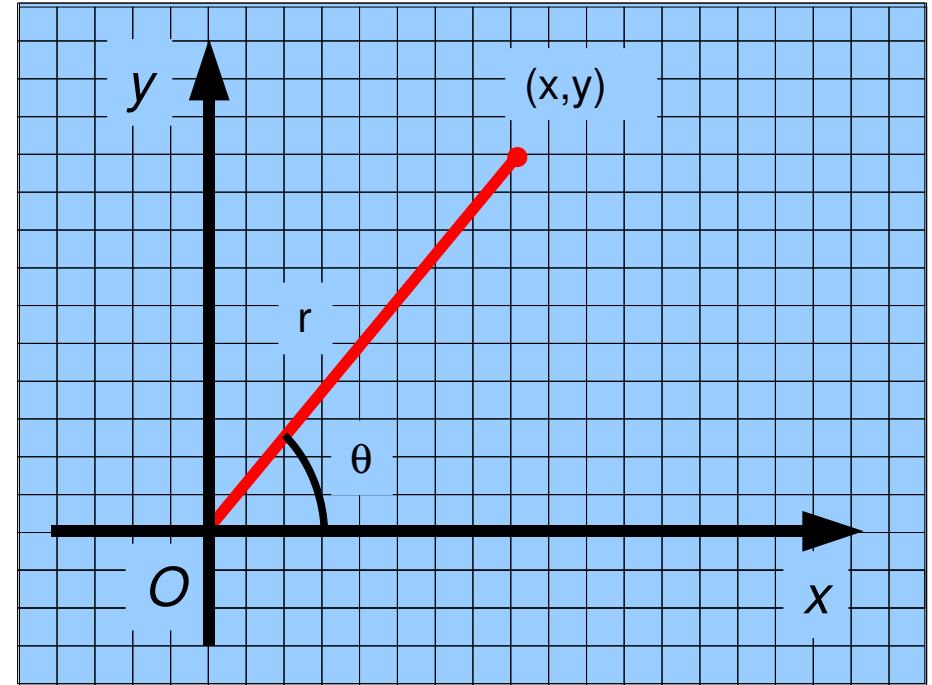
Introduzione



Sistemi di coordinate



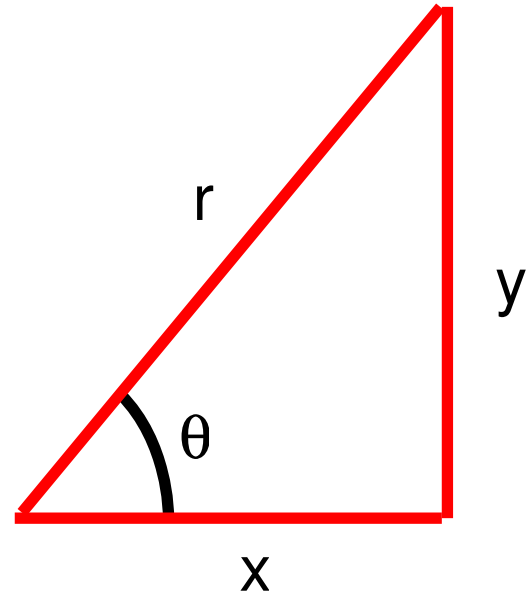
Coordinate cartesiane. Ogni punto è individuato da due coordinate (x,y) .



Coordinate polari piane. Ogni punto è rappresentato da una distanza r e dall'angolo θ , dove θ è misurato in senso antiorario a partire dall'asse x positivo.

Sistemi di coordinate

C'è corrispondenza tra coordinate cartesiane e coordinate polari, come si può vedere dal triangolo in figura!



Si può passare dalle une alle altre in questo modo:

cartesiane → polari

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

polari → cartesiane

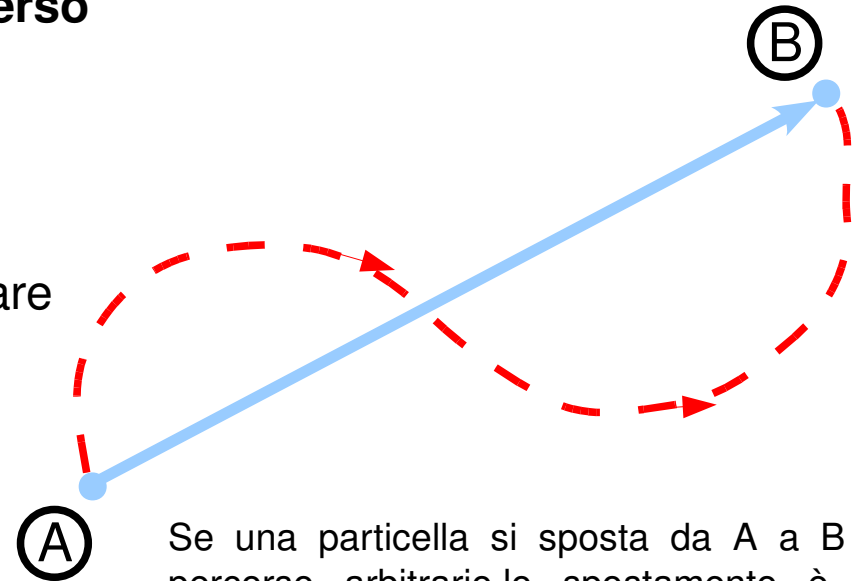
$$x = r \cos \theta$$
$$y = r \sin \theta$$

Grandezze vettoriali e scalari

Un vettore è una quantità fisica che deve essere specificata in modulo, direzione e verso

Esempi di grandezze vettoriali

- Posizione ($P(x,y)$)
- Spostamento, velocità, accelerazione
- Forze, momento lineare, momento angolare
- ...



Se una particella si sposta da A a B lungo un percorso arbitrario, lo spostamento è il vettore indicato dalla freccia da A a B.

Una grandezza scalare è specificata da un singolo valore con un'appropriata unità di misura e non ha direzione

Esempi di grandezze scalari

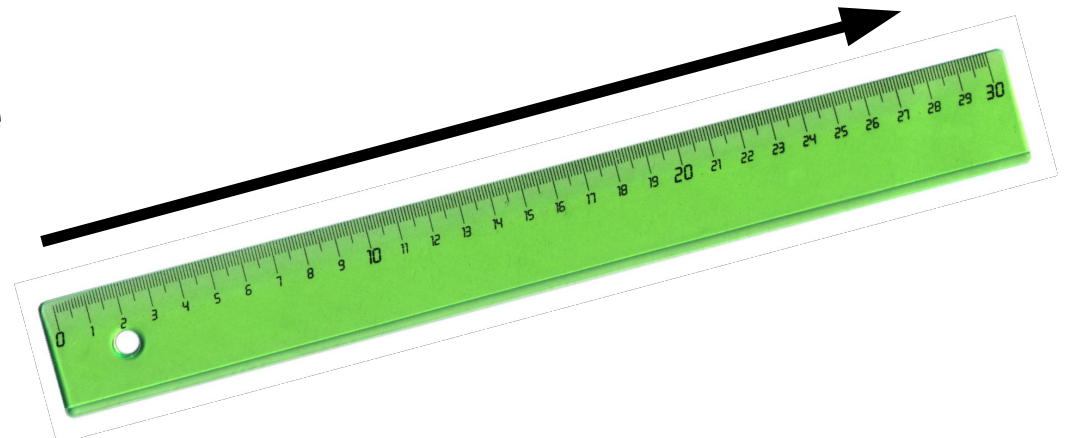
- Temperatura (gradi Fahrenheit, Celsius, Kelvin)
- Massa (grammo, oncia, kilogrammo)
- Tempo (secondo)



Grandezze vettoriali

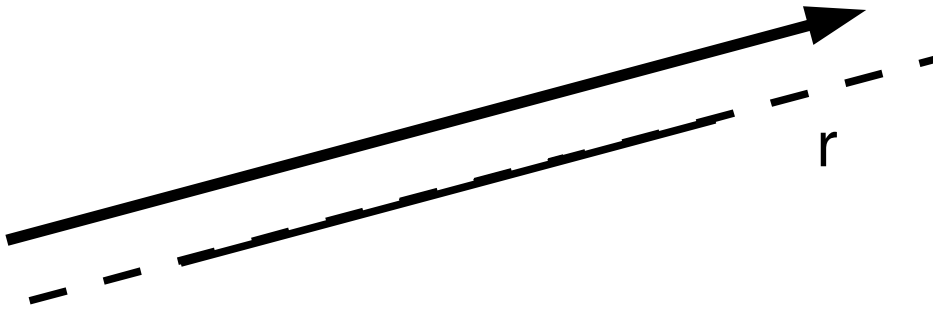
Modulo

Il modulo è la lunghezza del vettore, quindi è uno scalare!



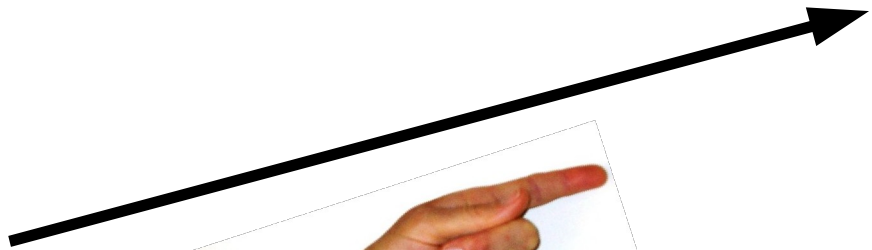
Direzione

La direzione è la retta di appartenenza del vettore



Verso

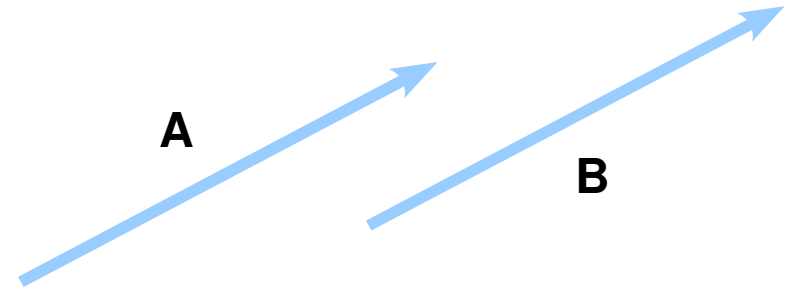
Il verso di un vettore è quello che va dalla sua coda alla sua freccia



Proprietà dei vettori

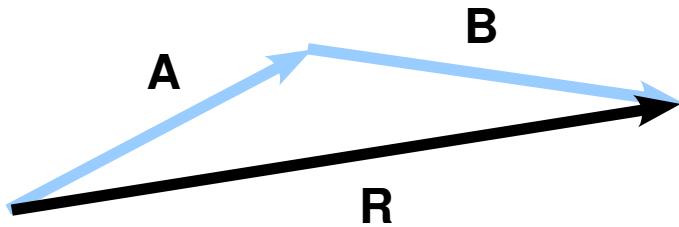
Uguaglianza di due vettori

Due vettori **A** e **B** sono uguali se hanno stessi modulo, direzione e verso.

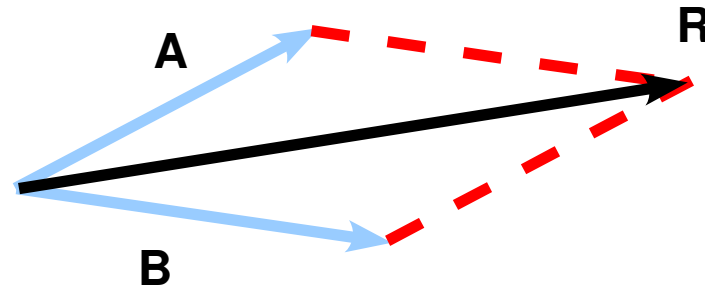


Somma di due vettori

Il vettore **R** risultante dalla somma $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ si può ottenere dai due metodi:



del triangolo



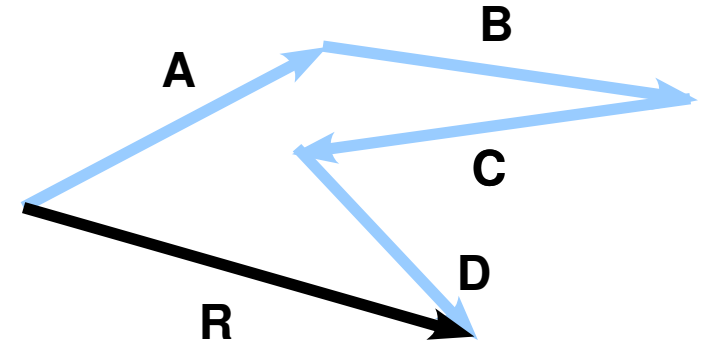
del parallelogrammo

Proprietà dei vettori

Somma di più vettori

Se i vettori da sommare sono molti si può:

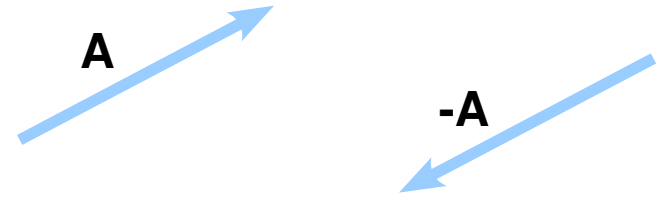
- Applicare reiteratamente il metodo del parallelogramma
- Estendere il metodo del triangolo che diviene metodo della poligonale



Metodo della poligonale

Opposto di un vettore

L'opposto di un vettore \mathbf{A} è quel vettore $-\mathbf{A}$ che sommato ad \mathbf{A} mi dà il vettore nullo

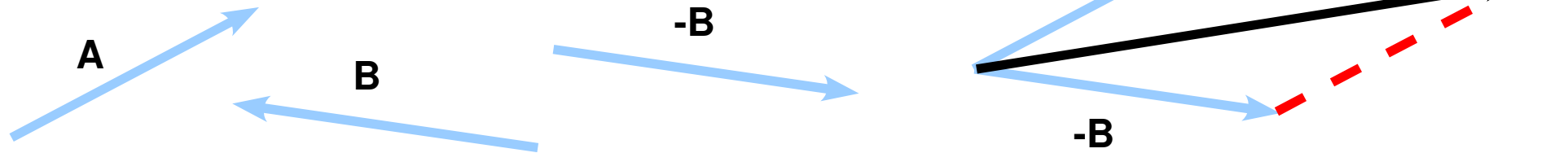


Il vettore opposto di \mathbf{A} possiede stesso modulo e direzione ma verso opposto

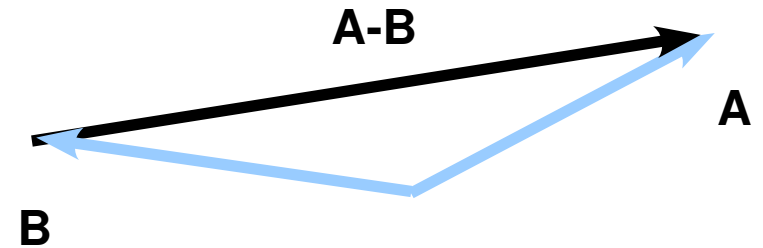
Proprietà dei vettori

Differenza di due vettori

La differenza $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ tra due vettori è la somma tra il vettore \mathbf{A} e l'opposto di \mathbf{B} .



Si può applicare anche il metodo del parallelogramma: il vettore differenza giace sulla diagonale del parallelogramma!



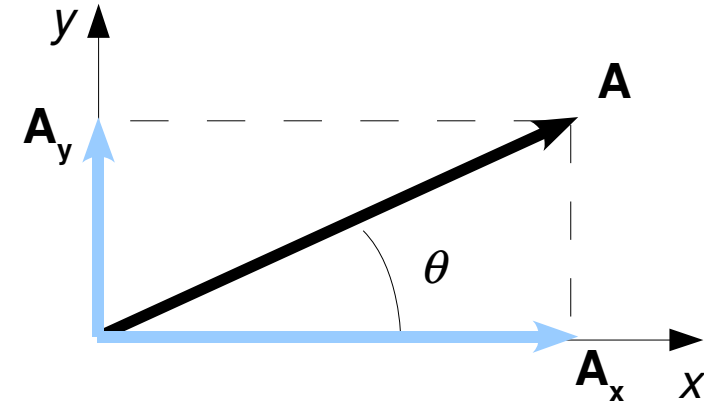
Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

Se un vettore \mathbf{A} viene moltiplicato per una quantità scalare positiva m , il prodotto è un vettore che ha stessa direzione e verso di \mathbf{A} e modulo mA . Se m è un numero negativo, il prodotto è un vettore con stessa direzione, verso opposto e modulo mA .

Componenti di un vettore

Scomposizione di un vettore

Se come due vettori si possono sommare per dare un terzo vettore, allora ogni vettore \mathbf{A} può essere scomposto in due generici vettori, per esempio orizzontale e verticale, lungo gli assi cartesiani del piano! \mathbf{A}_x ed \mathbf{A}_y si chiamano vettori componenti/coordinate di \mathbf{A} , dove $\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y$.



Le componenti di \mathbf{A} hanno valore in modulo che si ricava dalla trigonometria:

$$A_x = A \cos \theta$$

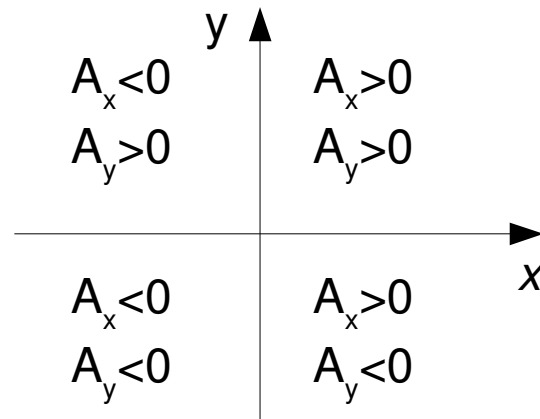
$$A_y = A \sin \theta$$

ovvero

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{A_y}{A_x}$$

I segni delle componenti dipendono dall'angolo θ secondo lo schema qui presentato!



Vettori unitari

Un vettore unitario è un vettore adimensionale di modulo 1.

Per i vettori unitari si usano i simboli \mathbf{i} e \mathbf{j} . Se prendo \mathbf{i} e \mathbf{j} nel verso di \mathbf{A}_x e di \mathbf{A}_y , allora posso riscrivere questi ultimi come $\mathbf{A}_x = A_x \mathbf{i}$ e $\mathbf{A}_y = A_y \mathbf{j}$, (A_x e A_y si chiamano coordinate) da cui

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j}$$

La risultante della somma di due vettori allora sarà

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$$= A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j}$$

$$= (A_x + B_x) \mathbf{i} + (A_y + B_y) \mathbf{j}$$

$$= R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j}$$

Quindi il vettore risultante ha per coordinate la somma algebrica delle coordinate dei vettori addendi!



Prodotto scalare

Il prodotto scalare di due vettori A e B è un numero reale definito come

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

Dove θ è l'angolo compreso tra i vettori; questa definizione è legata alle coordinate polari di A e B . Una definizione analoga, derivante dalle coordinate cartesiane è

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y$$

ovvero il prodotto scalare è la somma del prodotto delle componenti aventi lo stesso indice.

Proprietà del prodotto scalare

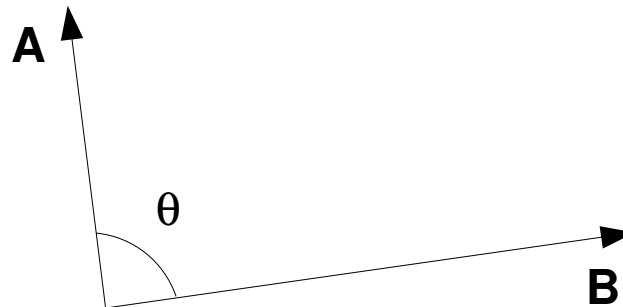
i) Il prodotto scalare di due vettori ortogonali è nullo;

ii) Il prodotto scalare gode della proprietà commutativa: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

iii) Il prodotto scalare gode della proprietà distributiva: $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

iv) $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{i} = 0$

v) se A è un vettore allora il suo modulo è $A = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$

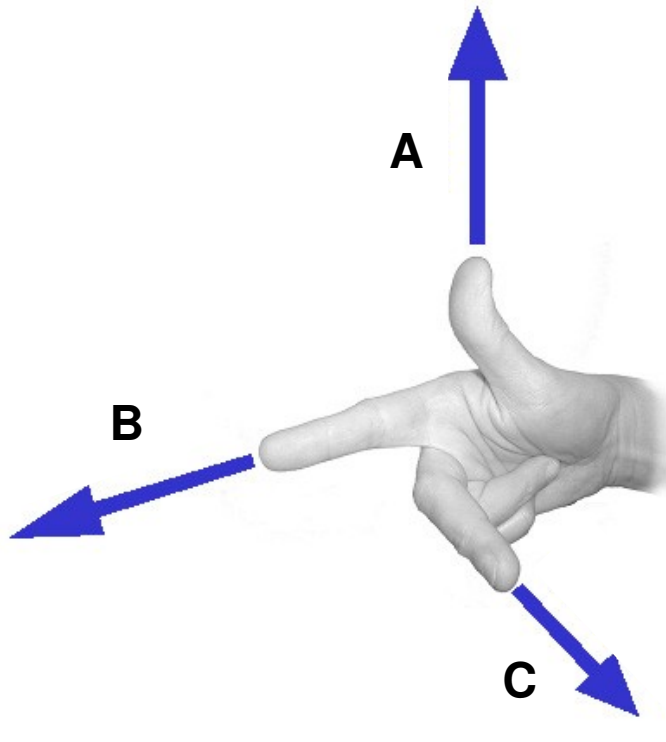


Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale di due vettori A e B è un vettore in modulo uguale a

$$|\vec{A} \wedge \vec{B}| = AB \sin \theta$$

Dove θ è l'angolo compreso tra i vettori. Per quanto riguarda direzione e verso di \mathbf{C} dobbiamo usare la regola della mano destra



Proprietà del prodotto vettoriale

i) Il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo;

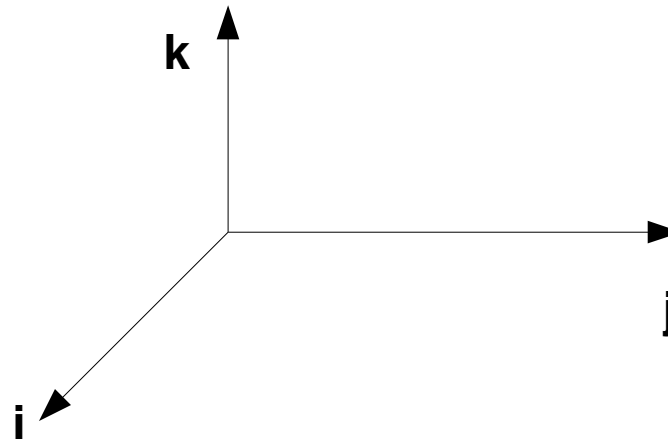
ii) è anticommutativo: $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$

iii) Il prodotto scalare gode della proprietà distributiva:

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$$

iv) $\hat{i} \wedge \hat{j} = \hat{k}$; $\hat{j} \wedge \hat{k} = \hat{i}$; $\hat{k} \wedge \hat{i} = \hat{j}$

v) $\hat{i} \wedge \hat{i} = \hat{j} \wedge \hat{j} = \hat{k} \wedge \hat{i} = 0$



Unità di misura

LUNGHEZZA

Il metro (m) è la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un tempo uguale a $1/299792458$ secondi.

MASSA

Il chilogrammo (kg), definito come la massa di un particolare cilindro di lega platino-iridio conservato all'International Bureau di Pesi e Misure di Sèvres, Francia.

TEMPO

Un secondo (s) è definito come 9192631770 volte il periodo delle vibrazioni di un atomo di cesio 133.

FORZA

Un newton (N) è definito come la forza che, agendo su un corpo di massa 1 kg, produce un'accelerazione di 1 m/s^2 .

LAVORO

È il lavoro compiuto da una forza di 1 N che muove un corpo per 1 m nella direzione della forza stessa.

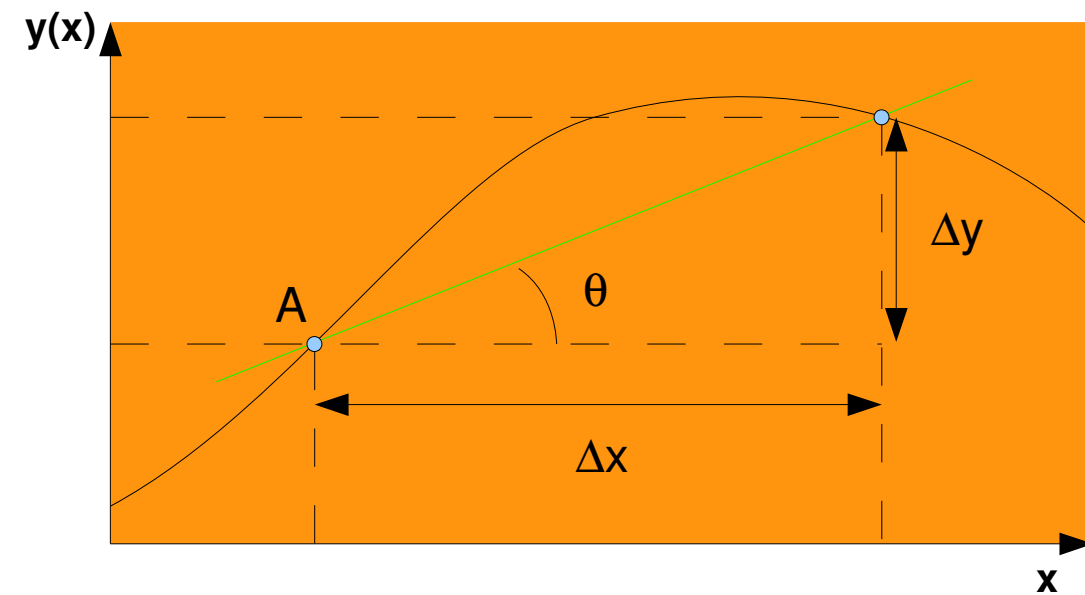
Calcolo differenziale

In fisica è utilissimo utilizzare il calcolo differenziale in quanto permette studiare l'andamento nel tempo, o nello spazio, di una grandezza fisica.

Data una funzione $y(x)=f(x)$, la derivata ci da indicazioni sul fatto che la funzione, in un intervallo o in un punto preciso, sia crescente, decrescente o nulla. Definiamo derivata di y rispetto ad x il limite del rapporto incrementale

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

Dove Δx e Δy sono quelli di figura.



Bisogna precisare che la tangente trigonometrica dell'angolo θ è proprio la funzione derivata calcolata nel punto A!!! Da ricordare che quando $y(x)=ax^n$ allora la sua funzione derivata è

$$\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}$$

Mentre la derivata di una funzione costante è uguale a zero.

Calcolo differenziale

Proprietà delle derivate

i) *Derivata del prodotto di due funzioni.* Se $f(x)=g(x)h(x)$ allora la derivata di $f(x)$ è

$$\frac{df(x)}{dx} = g(x) \frac{dh(x)}{dx} + h(x) \frac{dg(x)}{dx}$$

ii) *Derivata della somma di due funzioni.* Se $f(x)=g(x)+h(x)$ allora la derivata di $f(x)$ è

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dg(x)}{dx} + \frac{dh(x)}{dx}$$

iii) *Derivata di funzioni composte.* Se $y(x)=f(x)$ e $x=g(z)$ allora la derivata di $y(x)$ rispetto a z è il prodotto di due derivate

$$\frac{dy(x)}{dz} = \frac{dy(x)}{dx} \frac{dx}{dz}$$

iv) *Derivata seconda.* La derivata seconda di $y(x)$ rispetto ad x è la derivata della derivata dy/dx

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy(x)}{dx} \right)$$

Calcolo integrale

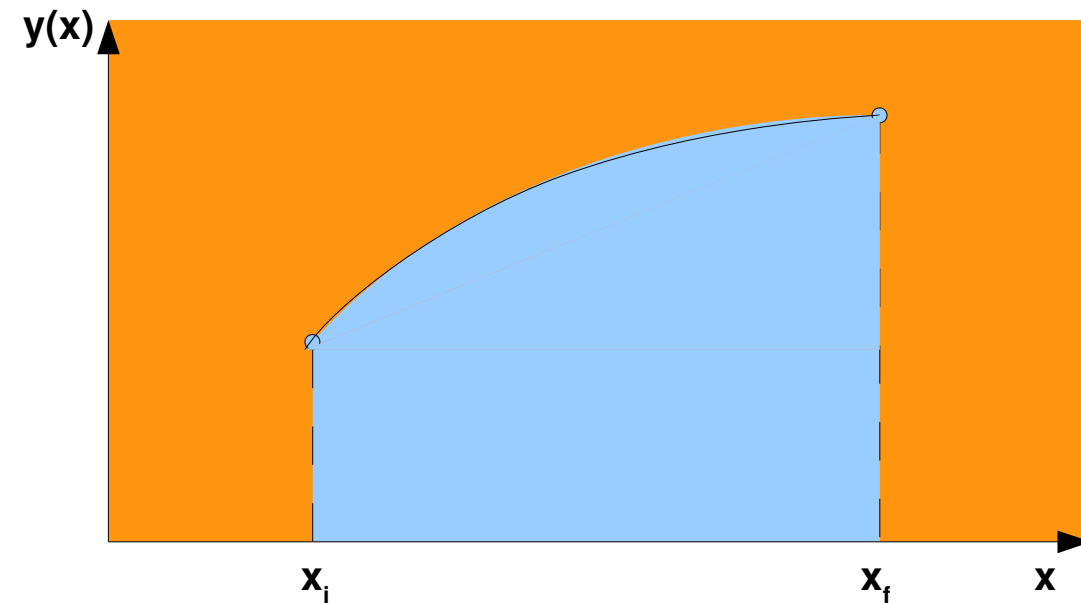
L'integrazione è la funzione matematica inversa della derivazione e si indica con

$$y(x) = \int f(x) dx$$

L'integrale indefinito $I(x)$ è definito come

$$I(x) = \int f(x) dx$$

dove $f(x)$ è la funzione integranda e $f(x) = dI(x)/dx$.



L'integrale definito di una funzione rappresenta l'area della funzione stessa ed si rappresenta con il simbolo

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x) dx$$

L'integrale definito di una funzione rappresenta l'area della funzione stessa ed si rappresenta con il simbolo