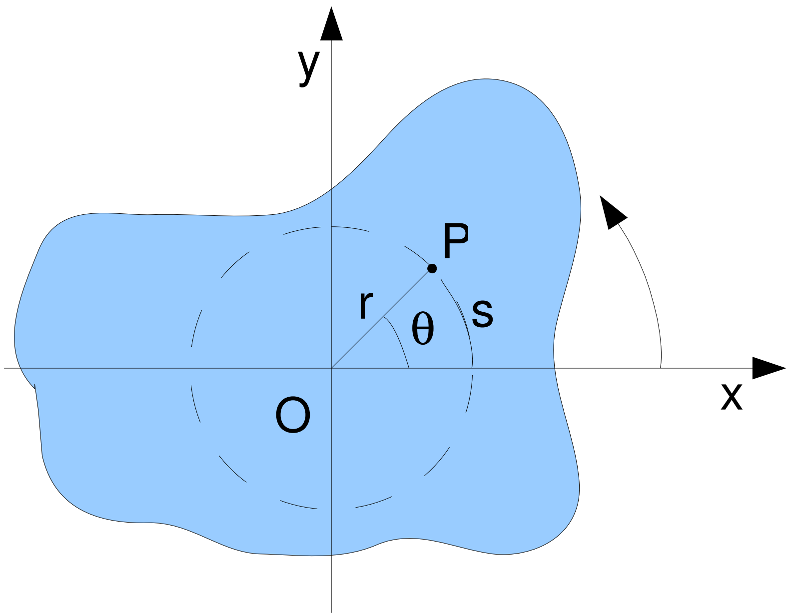
INGEGNERIA GESTIONALE
corso di Fisica Generale

Prof. E. Puddu

LEZIONE DEL 14 – 15 OTTOBRE 2008

Rotazione di un corpo rigido intorno ad un asse fisso

Cinematica rotazionale



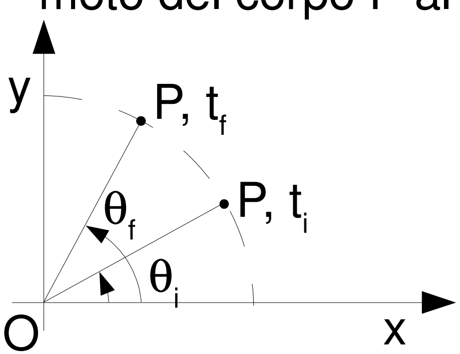
Supponiamo di osservare un corpo rigido sul piano XY, quindi piatto, che ruoti intorno al punto O. Definiamo *asse di rotazione* la retta perpendicolare al piano XY e passante per O.

Per studiare il moto di tutto il corpo, ci occuperemo del moto del punto P, rappresentante di tutti i punti del corpo in questione. Il punto P, a distanza r dall'origine degli assi O, si muove su una circonferenza di raggio r centrata in O. Studiamo il problema in coordinate polari (ovvero $P=P(r, \theta)$).

Notiamo che la distanza r di P dall'origine non varia nel tempo a differenza dell'angolo θ. Quindi dobbiamo studiare il problema dal solo punto di vista angolare. Notiamo innanzitutto che lo spazio percorso da P è l'arco di circonferenza s, per cui vale la relazione

$$s = r\theta$$

Purché l'angolo θ sia misurato in radianti. Notiamo allora che s e θ sono direttamente proporzionali (secondo la costante di proporzionalità r), il che significa che possiamo studiare il moto del corpo P al variare del solo angolo θ!



Quando un punto P si muove dalla posizione θ_i a θ_f , allora diremo che ha percorso un angolo $\Delta\theta=\theta_f-\theta_i$.

Cinematica rotazionale

Definiamo allora *velocità angolare media* la quantità:

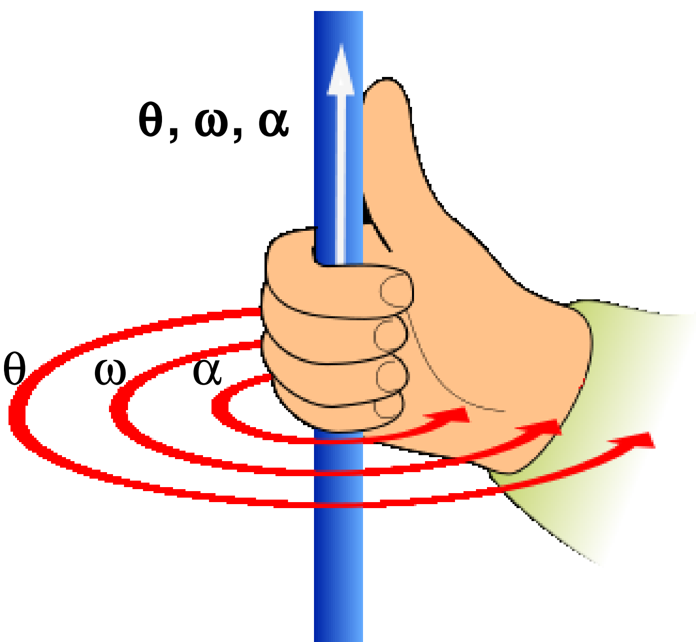
$$\overline{\omega} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

E la *velocità angolare* o *velocità angolare istantanea* il limite per $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

L'unità di misura della velocità angolare è rad s^{-1}.
Allo stesso identico modo (che tra l'altro avevamo già utilizzato per la cinematica traslazionale) definiamo l'accelerazione angolare α come:

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}$$



L'unità di misura di α è il rad s^{-1}. Nel caso che un corpo rigido ruoti attorno ad un asse fisso quindi, tutti i suoi punti avranno la stessa velocità ed accelerazione angolare in quanto queste sono indipendenti dalla posizione del punto stesso. I vettori $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ hanno modulo ω e α e verso dato dalla regola della mano destra: si avvolgono tutte le dita intorno al pollice nel verso di rotazione di ω e α, e si prende il pollice come verso per i vettori!

Cinematica rotazionale

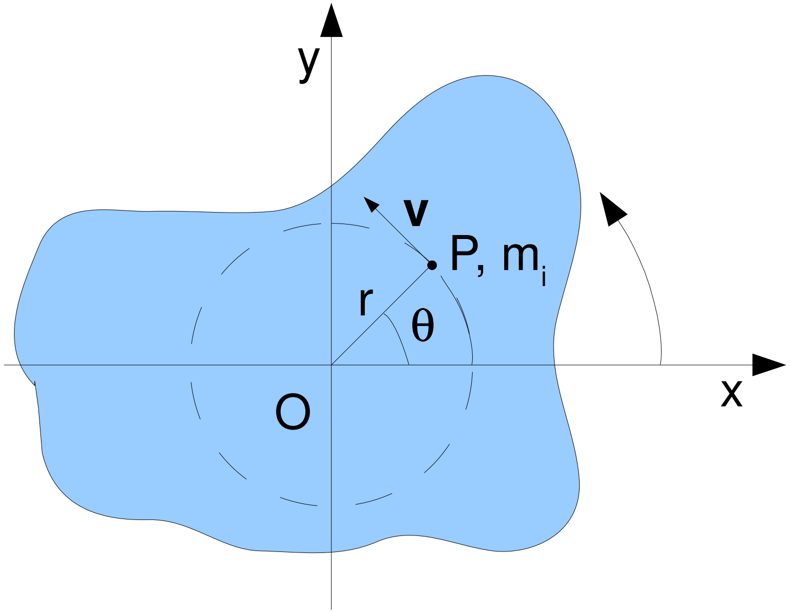
Allo stesso modo con cui abbiamo definito le leggi orarie per la cinematica traslazionale, definiamo ora le leggi orarie della cinematica rotazionale, saltando tutte le dimostrazioni in quanto analoghe a quelle già viste! Per α costante quindi, consideriamo il moto rotazionale uniformemente accelerato:

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t$$

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$$

Variabili angolari e lineari



Cerchiamo ora una relazione tra le variabili angolari appena viste e quelle lineari studiate nel moto circolare. Il punto P si muove lungo la circonferenza. Quindi la sua velocità v è una velocità tangenziale. Il modulo della velocità tangenziale è

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{d(r\theta)}{dt}=r\frac{d\theta}{dt}=r\omega$$

Tuttavia v, al contrario di ω, non è la stessa per tutti i punti! Infatti, essendo dipendente da r, aumenterà linearmente con la distanza dal punto O.

I punti alla periferia del nostro corpo rigido si muoveranno quindi più velocemente rispetto a quelli più interni. In corrispondenza del punto O i punti del corpo rigido resteranno fermi.

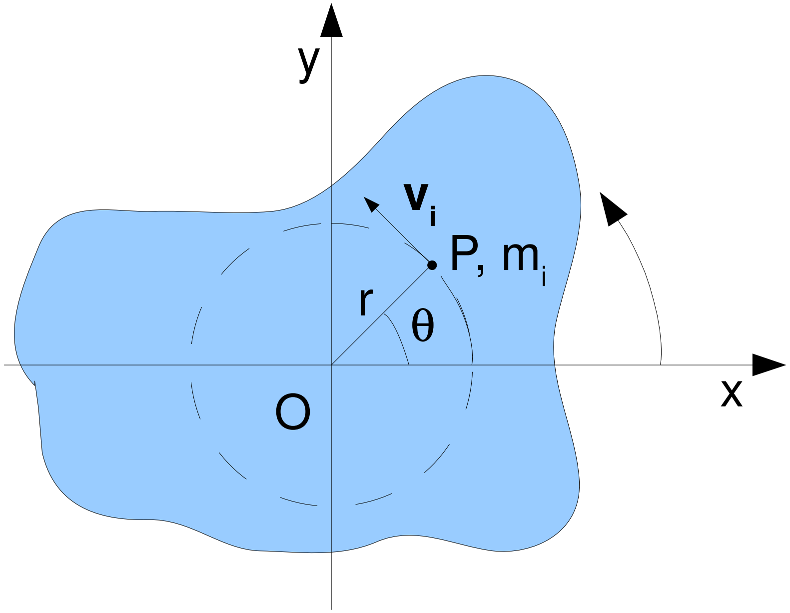
Definiamo l'accelerazione tangenziale a_t come derivata del modulo della velocità tangenziale:

$$a_t=\frac{dv}{dt}=\frac{d(r\omega)}{dt}=r\frac{d\omega}{dt}=r\alpha$$

L'accelerazione centripeta invece, espressa in variabili angolari diviene

$$a_c=\frac{v^2}{r}=\frac{r^2\omega^2}{r}=r\omega^2$$

Energia cinetica rotazionale



Consideriamo il corpo rigido in rotazione intorno all'asse fisso degli esempi precedenti. Ogni elemento infinitesimo del punto possiede energia cinetica K data dalla relazione

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Poiché l'energia di un corpo è la somma dell'energia posseduta da ogni suo punto, l'energia totale del sistema è data dalla sommatoria delle singole energie

$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega_i^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_1 m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

I passaggi contenuti nell'espressione precedente si giustificano nel modo seguente: come visto in **"Variabili angolari e lineari"** la velocità tangenziale del generico punto P è il prodotto della velocità angolare, comune a tutti i punti del corpo rigido, per la distanza da P dal punto O. Abbiamo indicato l'energia cinetica con K_R in quanto R sta per rotazionale.

Energia cinetica rotazionale

Definizione:
Il momento di inerzia di un corpo esteso è

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

L'unità di misura del momento di inerzia è $[I]=kg\ m^2$. L'espressione per l'energia cinetica rotazionale, con questa definizione, diventa

$$K_R = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Che, come formula, ricorda quella dell'energia cinetica traslazionale. Il momento di inerzia quindi, analogamente alla massa, rappresenta l'inerzia, ovvero la resistenza, del corpo rispetto al moto rotatorio. Tuttavia, mentre la massa è una proprietà intrinseca di un corpo, il momento di inerzia dipende anche dalla forma del corpo stesso, in quanto in esso compaiono le posizioni r_i di tutti i suoi punti!

Calcolo dei momenti di inerzia

Come visto quindi il momento di inerzia è molto importante, in quanto gioca il ruolo che la massa aveva nei moti traslazionali. Tuttavia esso dipende dalla forma di un corpo, ed il suo calcolo può risultare complicato. Inoltre il momento di inerzia, dipendendo dalle coordinate dei singoli punti che compongono il nostro corpo rigido, dipende dall'asse di rotazione Z passante per il punto O. Questo significa che il momento di inerzia riferito allo stesso corpo rigido, ma calcolato rispetto ad un punto O' diverso da O, sarà differente da quello calcolato rispetto ad O.

Dato un corpo rigido, composto dagli elementi Δm_i alle posizioni r_i, il momento di inerzia è definito come

$$I = \sum_i r_i^2 \Delta m_i$$

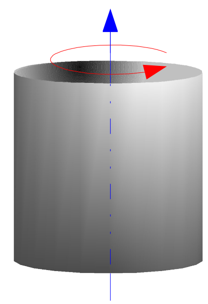
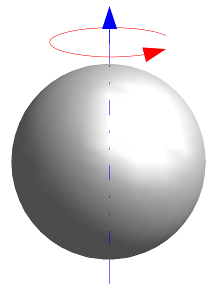
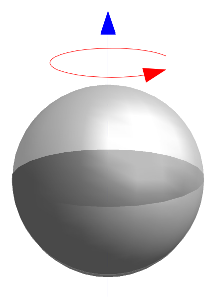
Passando al continuo, che va bene per corpi densi, la sommatoria diventa un integrale

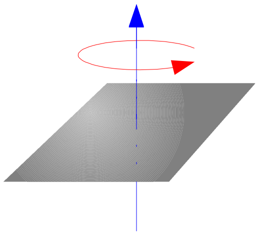
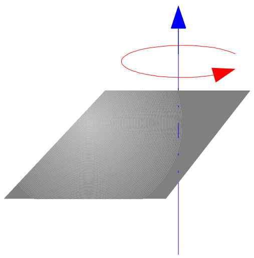
$$I = \lim_{\Delta m \to} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int_M r^2 dm$$

Quest'ultimo integrale è spesso difficile da calcolare. Per questa ragione ci si attiene a tabelle in cui i momenti di inerzia sono già calcolati!

Momenti di inerzia

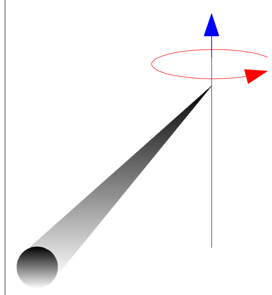
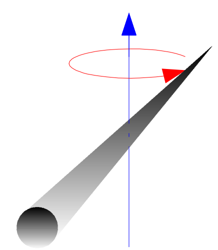
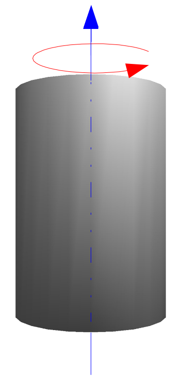
Qui sotto ci sono i momenti di inerzia già calcolati di alcuni corpi rigidi a simmetria cilindrica o sferica

Descrizione	Figura	Momento di inerzia
Guscio cilindrico con basi aperte di massa M e raggio R che ruota attorno al suo asse		$I = MR^2$
Sfera piena di raggio R e massa M che ruota attorno ad un suo diametro		$I = \frac{2}{5} MR^2$
Guscio sferico di raggio R e massa M che ruota attorno ad un suo diametro		$I = \frac{2}{3} MR^2$

Descrizione	Figura	Momento di inerzia
Rettangolo sottile di larghezza a, profondità b e massa M che ruota attorno al suo centro di massa		$I = \frac{M\left(a^2 + b^2\right)}{12}$
Rettangolo sottile di larghezza a, profondità b e massa M che ruota attorno al punto medio della sua profondità		$I = \frac{Mb^2}{3} + \frac{Ma^2}{12}$

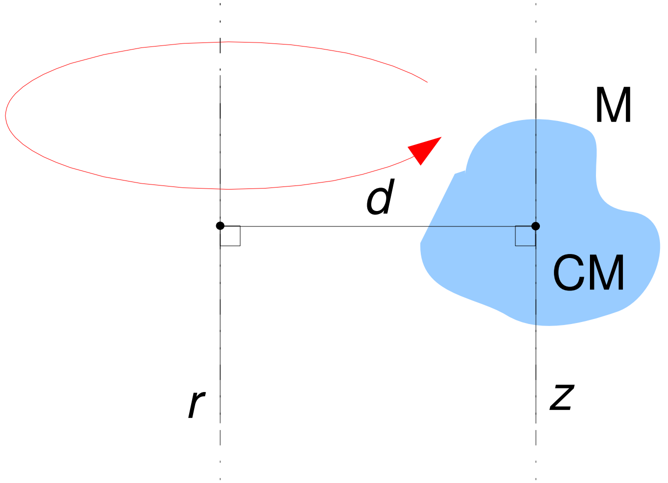
Momenti di inerzia

Qui sotto ci sono i momenti di inerzia già calcolati di alcuni corpi rigidi a simmetria cilindrica o sferica

Descrizione	Figura	Momento di inerzia
Barra sottile di lunghezza l e massa M che ruota attorno ad un estremo		$I = \frac{Ml^2}{3}$
Barra sottile di lunghezza l e massa M che ruota attorno al suo centro di massa		$I = \frac{Ml^2}{12}$
Cilindro di massa M e raggio R che ruota attorno al suo asse		$I = \frac{MR^2}{2}$

Teorema di Huygens-Steiner o degli assi paralleli

Il calcolo del momento di inerzia è complicato anche perché cambia in base alla scelta del polo O rispetto a cui è calcolato. Il teorema degli assi paralleli può accorrere in aiuto in quanto esso dice che, se abbiamo un corpo di massa M che ruota intorno ad un asse *r*, il suo momento di inerzia è uguale alla somma del momento di inerzia calcolato rispetto ad un asse $z /\!/ r$ passante dal centro di massa I_{CM} sommato alla sua massa moltiplicata per il quadrato della distanza *d* tra assi



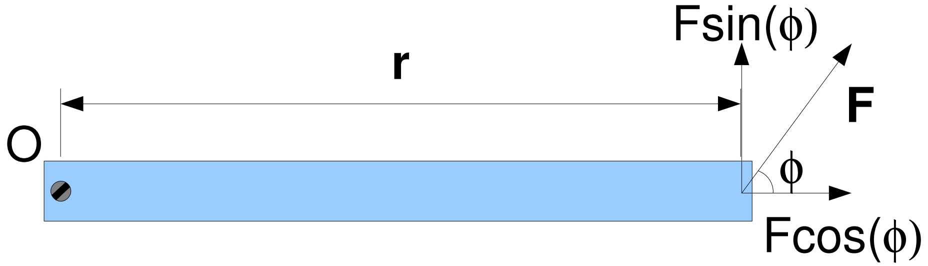
$$I_r = I_{CM} + Md^2$$

Momento della forza

L'efficacia di una forza nel generare una rotazione è un problema che dipende dalla direzione della forza, oltre che dalla distanza di essa dall'asse di rotazione. Immaginiamo infatti di volere aprire una porta: Se applichiamo una forza nella direzione che va dalla maniglia ai cardini, ovviamente non metteremo mai in moto la porta stessa, in quanto la sua reazione vincolare si opporrebbe alla forza applicata appunto. È facile capire quindi che per aprire una porta, la forza maggiormente efficacie ha direzione perpendicolare al piano della porta stessa. Allo stesso modo ragioniamo sulla distanza a cui applichiamo questa forza: se tentiamo di aprire una porta per mezzo di una forza perpendicolare che agisce molto vicino ai cardini, dovremo utilizzare una forza molto intensa (ovvero faremo molta fatica!). Questa è la ragione per cui le maniglie sono lontane dall'asse di rotazione.

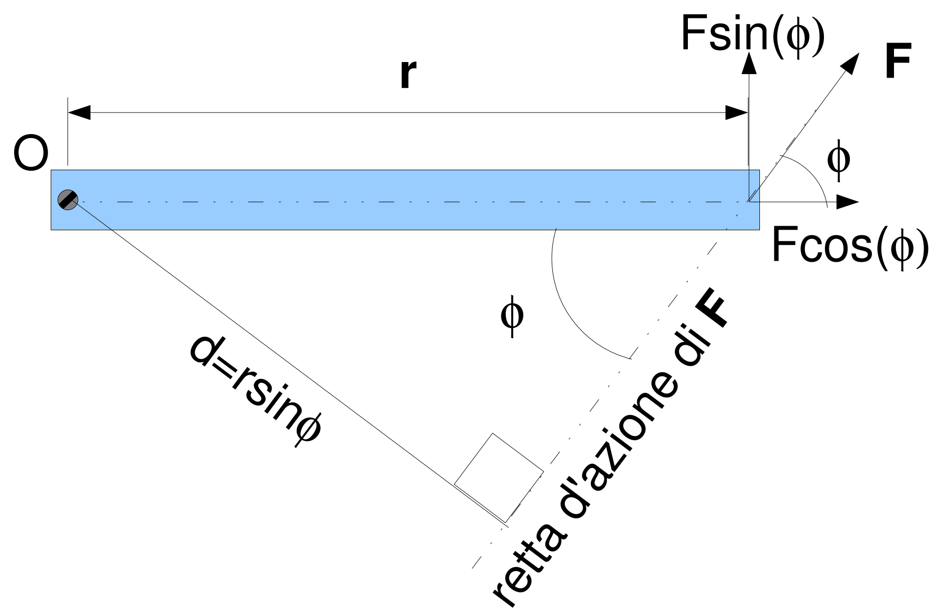
Tutto questo discorso in fisica è riassunto in un'unica grandezza vettoriale che si chiama momento meccanico della forza o momento torcente (torque) che si indica con la lettera **M** (in Italia) o $\boldsymbol{\tau}$ (nei paesi anglosassoni).

Supponiamo di applicare una forza **F** come in figura ad una sbarra rigida imperniata intorno al punto O (o all'asse fisso passante per O). Come si può capire dalla figura, la componente



della forza parallela ad **r** (Fcosϕ) non ha nessun effetto in quanto essa tende ad allungare la sbarra, che è per ipotesi rigida e non deformabile! La componente perpendicolare (Fsinϕ) invece è una forza tangenziale rispetto alla circonferenza centrata in O e di raggio r, per cui darà alla sbarra rigida un'accelerazione tangenziale e la metterà in rotazione intorno al centro di rotazione O.

Momento della forza



Definizione:

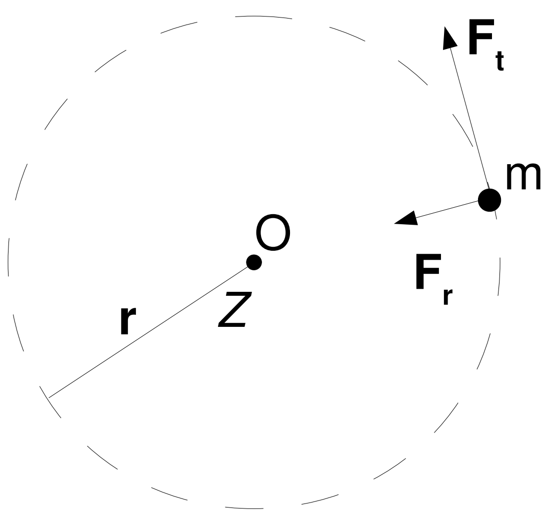
Facendo riferimento alla figura di sopra, il momento meccanico M della forza F è il vettore di modulo

$$M = rF\sin\phi = Fd$$

L'unità di misura del momento meccanico è [M]=N m. La distanza *d* è definita come la distanza tra il punto O e la retta di azione della forza, ovvero la retta su cui il vettore **F** giace. Da notare che il momento della forza ha senso solo se riferito ad un punto O e ad un asse di rotazione *Z* passante per O. Se cambio asse, cambia anche il momento meccanico. Ne consegue che se due forze agiscono sullo stesso corpo allora ognuna di esse avrà il suo momento meccanico!

La somma dei momenti ci dirà da quale parte la forza tenderà a fare ruotare il corpo rigido! Per convenzione si assumono positivi i momenti delle forze che tendono a dare una rotazione in senso antiorario e negativi i momenti delle forze che danno una rotazione in senso orario.

Momento della forza e accelerazione angolare



Studiamo il caso di un punto materiale di massa m che si muova su una traiettoria circolare a causa di una forza tangenziale F_t e di una forza (centripeta) radiale F_r. La forza radiale serve a mantenere il corpo sulla traiettoria circolare mentre la forza tangenziale fa variare, istante per istante, il modulo della velocità tangenziale v_t fornendo un'accelerazione tangenziale a_t. La forza radiale possiede momento meccanico nullo in quanto l'angolo ϕ tra essa ed il raggio r è $\phi=0$ e di conseguenza anche $\sin\phi=0$.

Per quanto riguarda la forza tangenziale, l'equazione di Newton ed il momento meccanico sono

$$F_T = m a_t$$

$$M = F_T r = m a_t r$$

Poiché l'accelerazione tangenziale è $a_t=r\alpha$ avremo che

$$M = m a_t r = m r \alpha r = m r^2 \alpha$$

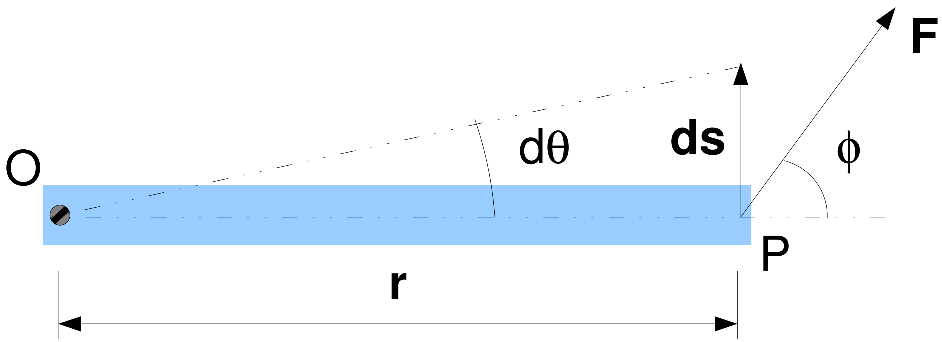
Considerato che il momento di inerzia I per un corpo puntiforme di massa m che si trovi a distanza r dall'asse di rotazione è $I=mr^2$, otteniamo che il momento meccanico M di una forza tangenziale che agisce sulla massa m puntiforme è

$$M = m r^2 \alpha = I \alpha$$

Nel caso che più forze agiscano sul nostro corpo avremo

$$\sum_i M_i = I \alpha$$

Lavoro, potenza ed energia nel moto rotatorio



Consideriamo il corpo rigido in figura libero di ruotare intorno al punto O e la forza F che agisce su di esso. Vogliamo calcolare il lavoro infinitesimo compiuto dalla forza F che muove il corpo facendolo ruotare di un angolo dθ. A questo spostamento angolare corrisponde una traslazione, del generico punto P, di una quantità ds=r sin(dθ)=r dθ per angoli molto piccoli.

Il lavoro infinitesimo svolto sul generico punto P quindi è

$$dW = \vec{F} \cdot d\,\vec{s} = F \sin\phi\, ds = F \sin\phi\, r\, d\,\theta$$

Dove abbiamo sfruttato il fatto che il prodotto scalare tra il vettore **F** ed il vettore **ds** è F ds sinϕ (siamo abituati a vedere il prodotto scalare come funzione del coseno, ma in questo caso si sceglie il seno perché in questo sistema di riferimento la componente di F parallela allo spostamento è Fsinϕ). Poiché il momento della forza F è M=Fsinϕ r, il lavoro della forza è

$$dW = (F \sin\phi\, r)\, d\,\theta = M d\,\theta$$

Dividendo entrambi i membri per dt e ricordando che la derivata del lavoro rispetto al tempo è la potenza otteniamo

$$P = \frac{dW}{dt} = M \frac{d\,\theta}{dt} = M\,\omega$$

Quest'equazione fornisce la potenza erogata da una forza che mette in rotazione un corpo rigido (CFR. *W*= Fv)!

LIUC

Il teorema lavoro-energia cinetica nel moto rotatorio

Partiamo dall'uguaglianza

$$\sum_i M_i = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = I\omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

Moltiplicando a destra e sinistra per dθ otteniamo

$$\sum_i M_i d\theta = dW = I\omega d\omega$$

Integrando quest'espressione tra le posizioni θ_i e θ_f ricaviamo

$$\sum_i W_i = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \sum_i M_i d\theta = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega d\omega = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2$$

Ovvero il lavoro compiuto su di un corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso dalle forze esterne è uguale alla variazione di energia cinetica rotazionale del corpo stesso.

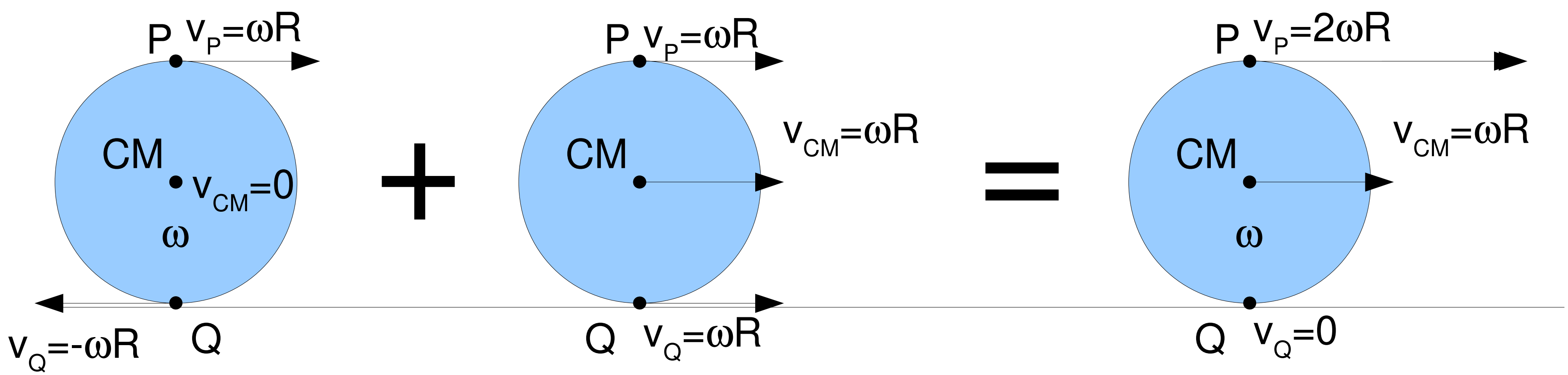
Confronto tra moto rotatorio e moto traslazionale

In questa tabella compaiono le grandezze relative al moto rotatorio e di fianco le corrispondenti grandezze del moto rotatorio

Moto di traslazione		Moto di rotazione attorno ad un asse fisso	
Velocità lineare	$v = \frac{dx}{dt}$	Velocità angolare	$\omega = d\frac{\theta}{dt}$
Accelerazione lineare	$a = \frac{dv}{dt}$	accelerazione angolare	$\alpha = d\frac{\omega}{dt}$
Forza	$F = ma$	Momento meccanico	$M = I\alpha$
Accelerazione costante	$v_f = v_i + at$ $x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2$	Accelerazione angolare costante	$\omega_f = \omega_i + \alpha t$ $\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
Lavoro	$W = \int F(x)\,dx$	Lavoro	$W = \int M(\theta)\,d\theta$
Energia cinetica traslazionale	$K = \frac{1}{2}mv^2$	Energia cinetica rotazionale	$K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$
Potenza	$P = Fv$	Potenza	$P = M\omega$
Quantità di moto	$p = mv$	Momento della Quantità di moto	$L = I\omega$
Forza risultante	$\sum_i F_i = \frac{dp}{dt}$	Momento meccanico risultante	$\sum_i M_i = \frac{dL}{dt}$

Moto di rotolamento di un corpo rigido

Si consideri un corpo rigido di massa M a simmetria radiale che rotoli sul piano.
Il moto di rotolamento di tale corpo rigido è la composizione di un moto circolare uniforme con un moto traslatorio. Il moto è senza strisciamento.
Tali condizioni sono verificate se e solo se la velocità di traslazione è $v_{CM}=\omega R$, dove ω è la velocità angolare del moto circolare uniforme ed R è il raggio del corpo.



Il moto di traslazione avviene a velocità $v_{CM}=\omega R$, il che significa che ogni punto del corpo rigido trasla esattamente a quella velocità. Il moto rotatorio, a velocità angolare ω, fa sì che la velocità dei punti P e Q sia opposta. Quando combino gli effetti sovrapponendo i due moti il punto Q assume velocità nulla, il centro di massa mantiene la sua velocità $v_{CM}=\omega R$ ed il punto P possiede velocità $v_{CM}=2\omega R$.

L'energia cinetica rotazionale di questo corpo si calcola per mezzo dell'espressione trovata in precedenza, prendendo come asse di rotazione quello passante per il punto Q, che è il punto intorno al quale il corpo rotola (punto a velocità nulla).

Moto di rotolamento di un corpo rigido

L'energia cinetica per il moto di rotolamento è quindi:

$$K_R = \frac{1}{2} I_Q \omega^2$$

dove I_Q è il momento di inerzia calcolato rispetto al punto Q della figura. Se ora applichiamo il teorema degli assi paralleli, ricalcoliamo il momento di inerzia I_Q rispetto al centro di massa

$$I_Q = I_{CM} + mR^2$$

Da cui possiamo ricalcolare l'energia cinetica rotazionale

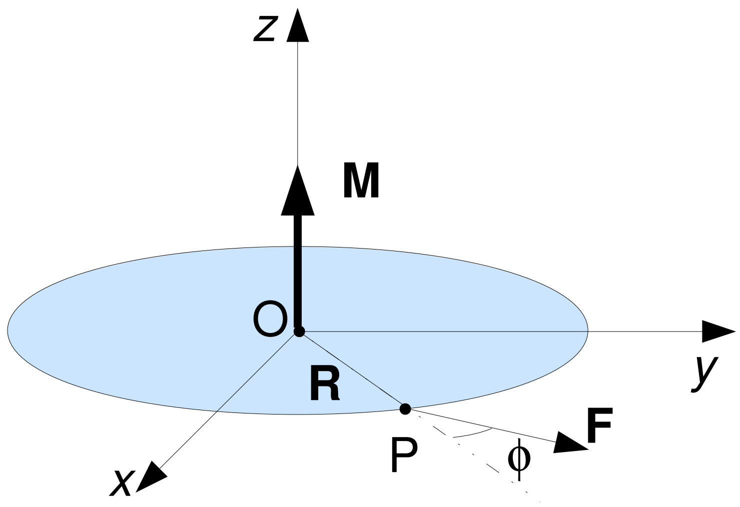
$$K_R = \frac{1}{2}(I_{CM} + mR^2)\omega^2 = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2} mR^2\omega^2$$

Da cui, sapendo che $v_{CM}=\omega R$, ricaviamo

$$K_R = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2$$

Nel moto di rotolamento quindi l'energia cinetica è uguale all'energia cinetica rotazionale intorno al centro di massa sommata dell'energia cinetica traslazionale del centro di massa.

Prodotto vettoriale e momento della forza



Consideriamo una forza **F** applicata ad un corpo a simmetria rotazionale come in figura alla posizione **R**. Come abbiamo già visto, solo la componente della forza perpendicolare al raggio agisce sulla rotazione, che avviene attorno all'asse *z*. Il momento ha modulo M=RFsinϕ.

Definiamo direzione di M come la direzione dell'asse *z*, e diamo ad M il verso tramite la regola, già vista, della mano destra. Quindi il vettore **M** si ottiene per mezzo del prodotto vettoriale tra R ed F

$$\vec{M} = \vec{R} \wedge \vec{F}$$

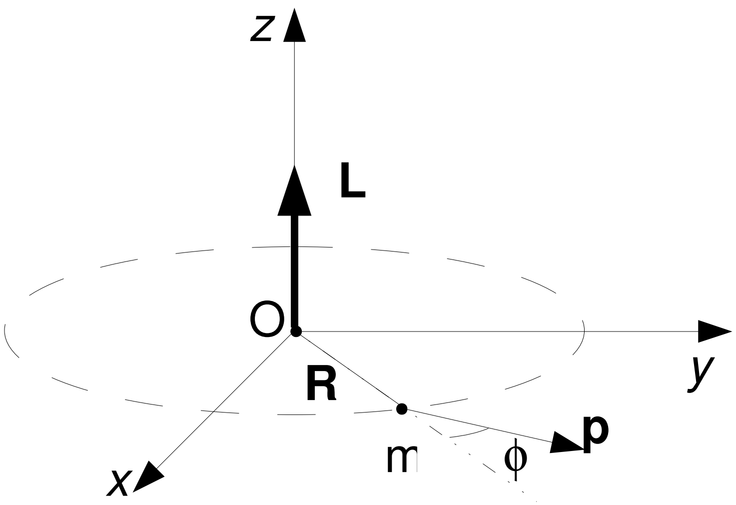
Dove $\wedge$ è il simbolo del prodotto vettore.

Momento della quantità di moto, o angolare, di un punto materiale

Si definisce momento della quantità di moto (o momento angolare) **L** del punto materiale, calcolato rispetto al polo O, il prodotto vettoriale tra il vettore posizione **R** e la quantità di moto **p** del punto.

$$\vec{L} = \vec{R} \wedge \vec{p}$$

L'unità di misura di L è [L]=kg m²/s. L è l'analogo, nel moto traslazionale, della quantità di moto.



Supponiamo che più forze agiscano sul punto materiale di massa m. Allora, poiché ogni forza ha il suo momento, avremo che

$$\sum_i \vec{M}_i = R \wedge \sum_i \vec{F}_i = R \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Dove nello scrivere l'ultimo membro abbiamo sfruttato la seconda legge di Newton. Quindi se su un corpo puntiforme agiscono varie forze, la somma dei momenti di queste forze è uguale al prodotto vettore tra la posizione del corpo e la derivata della sua quantità di moto.

Dalla definizione **L**=**Rp** ricaviamo, derivando

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Dove il primo termine a secondo membro si è annullato in quanto velocità e quantità di moto sono parallele.

Momento della quantità di moto, o angolare, di un punto materiale

Possiamo quindi scrivere la relazione

$$\sum_i \vec{M}_i = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Quindi la somma dei momenti meccanici agenti su un punto materiale è uguale alla variazione di momento angolare. Se su un corpo non agiscono forze esterne, allora il suo momento angolare si conserva ed il corpo permane nel suo stato di quiete o di moto circolare uniforme!
Questa formula è l'analogo, per il moto rotazionale, della formula

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

che abbiamo visto nella dinamica.

Momento angolare di un sistema di particelle

Supponiamo di avere un sistema di N punti materiali. Definiamo momento angolare totale la somma dei momenti angolari (calcolati tutti rispetto allo stesso asse *z*) di ogni punto

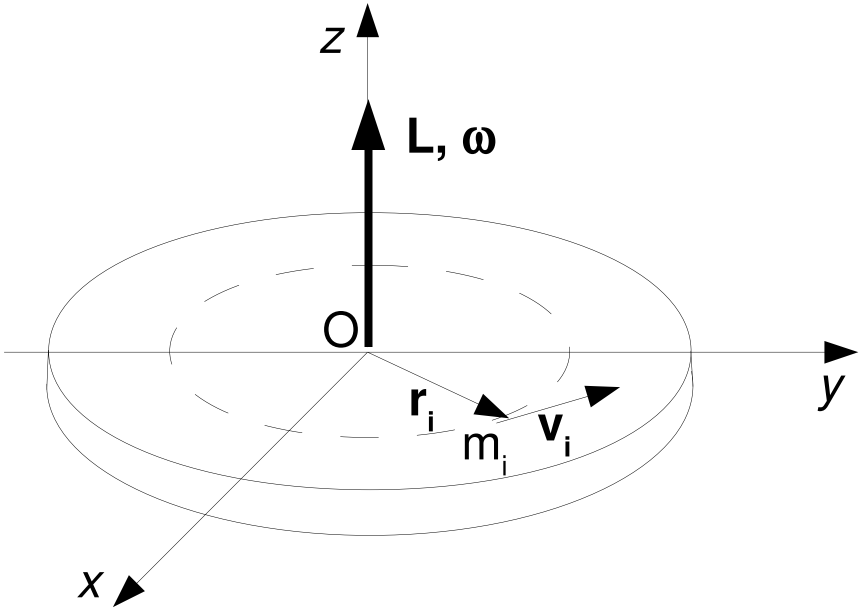
$$\vec{L}_{TOT} = \sum_i \vec{L}_i$$

Il momento angolare totale di un sistema può variare. Infatti se ci sono forze esterne che agiscono sui corpi puntiformi, per le espressioni viste nelle slides precedenti il momento varierà.

$$\sum_i \vec{M}_i = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{L}_i = \frac{d\vec{L}_{TOT}}{dt}$$

Al contrario, se sul mio sistema di particelle agiscono solo forze interne, per la terza legge di Newton il momento meccanico totale sarà nullo ed il momento angolare del sistema di particelle si conserverà!

Momento angolare di un corpo rigido in rotazione



Sia dato un corpo a simmetria rotazionale che ruota intorno all'asse *z*. Tutti i punti del corpo rigido ruotano a velocità angolare ω. Poiché raggio e velocità sono sempre perpendicolari (la velocità è tangenziale), il momento angolare dell'i-esimo elemento di massa che compone il mio corpo rigido è:

$$L_i = m_i v_i r_i = m_i r_i^2 \omega$$

Il momento angolare quindi si ottiene come la somma di tutti gli elementi di massa m_i:

$$L_z = \sum_i L_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega$$

ovvero

$$L_z = I_z \omega$$

Dove I_z è il momento di inerzia del corpo calcolato rispetto all'asse *z*. Derivando quest'espressione rispetto al tempo e ricordando che I è costante otteniamo

$$\frac{d L_z}{dt} = \sum_i M_i = I_z \frac{d \omega}{dt} = I_z \alpha$$

Quindi il momento meccanico risultante delle forze esterne di agenti su un corpo rigido è il prodotto del momento di inerzia e dell'accelerazione angolare α.

Momento angolare di un corpo rigido in rotazione

Nota che la relazione appena trovata è l'equivalente della seconda legge di Newton per il sistema rotazionale.

I vettori **M** ed **L** possono essere infine scritti come

$$\vec{M} = I_z \vec{\alpha}$$

$$\vec{L} = I_z \vec{\omega}$$

Leggi di conservazione

Come abbiamo già detto, se il momento meccanico risultante delle forze esterne è nullo, allora il momento angolare di un sistema isolato rimane costante.

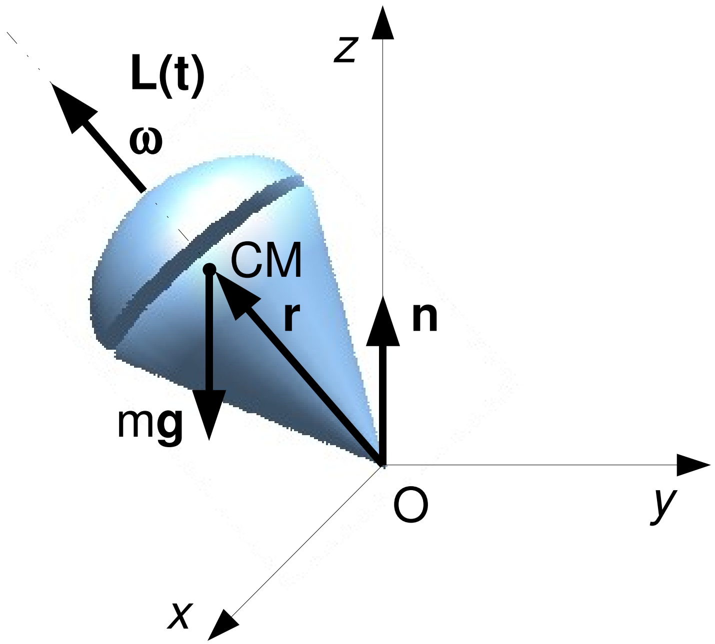
$$\sum \vec{M}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L} = cost$$

Per i sistemi isolati quindi le leggi di conservazione sono

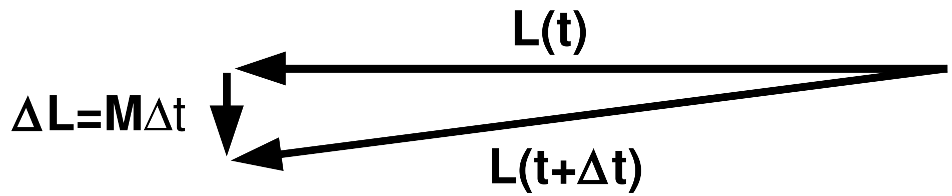
Conservazione dell'energia	$K_i + U_i = K_f + U_f$
Somma delle forze esterne nulla	$\sum \vec{F}_{ext} = 0$
Quantità di moto costante	$\vec{p}_i = \vec{p}_f$
Somma dei momenti meccanici esterni nulla	$\sum \vec{M}_{ext} = 0$
Momento angolare costante	$\vec{L}_i = \vec{L}_f$

Moto di trottole e giroscopi

La trottola è un corpo rigido che ruota attorno al proprio asse. Oltre al moto semplice di rotazione, si ha anche un moto di precessione dell'asse della trottola attorno all'asse *z* rispetto al quale sono calcolati i momenti. Inoltre il centro di massa della trottola è esterno al punto su cui essa appoggia al piano, tuttavia essa non cade. Cerchiamo di capirne il perché:



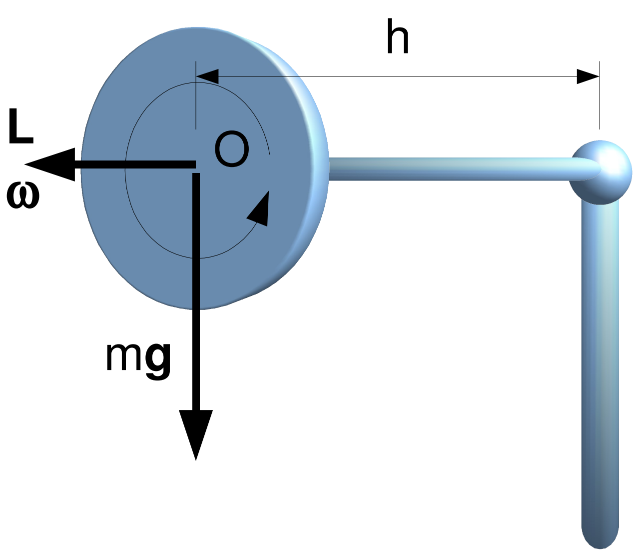
La reazione vincolare **n** e uguale al peso m**g** della trottola. Il momento angolare **L** è allineato a $\boldsymbol{\omega}$, diretta lungo l'asse di rotazione della trottola. Il momento meccanico della forza peso è **M** diretto nel verso delle *x* positive (regola della mano destra). Il momento meccanico rappresenta la variazione del momento angolare, difatti $\Delta\mathbf{L}=\mathbf{M}\Delta t$. Quindi, riproducendo il grafico dei momenti sul piano xy possiamo ricavare graficamente il momento angolare all'istante t+Δt.



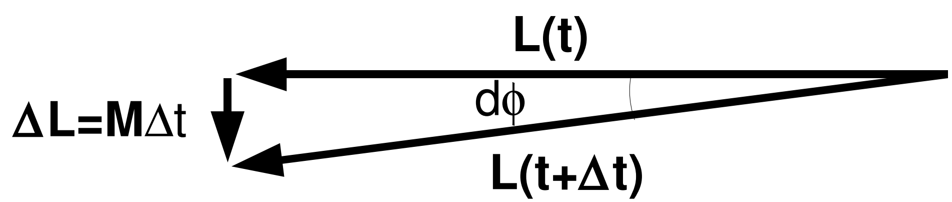
Come si può osservare, il momento angolare ha cambiato direzione e verso. Poiché la direzione del momento angolare è quella attorno a cui ruota la trottola, essa modificherà, nel tempo, il suo asse di rotazione, dando così luogo al moto di precessione! Quindi la trottola non cadrà poiché la forza peso non causa una rotazione verso terra, bensì una variazione di momento angolare. Poiché Δ**L** è perpendicolare ad **L**, **L** varierà solo in direzione e verso ma non in modulo! Quindi la velocità angolare ω della trottola non cambierà!

Moto di trottole e giroscopi

Per calcolare la velocità angolare di precessione, facciamo uso del giroscopio. Un giroscopio è uno strumento composto da un braccio fisso verticale senza massa, a cui è appoggiato un braccio orizzontale senza massa libero di ruotare sul piano, alla cui estremità vi è collegata una ruota che gira a velocità angolare costante ω.



La forza peso è m**g**, il momento angolare **L** è diretto lungo il braccio h. Il momento meccanico della forza peso è diretto lungo il raggio orizzontale della ruota R.



Come visto per la trottola, nell'intervallo di tempo dt il momento angolare ruota dell'angolo $d\phi$. Vale quindi la relazione trigonometrica

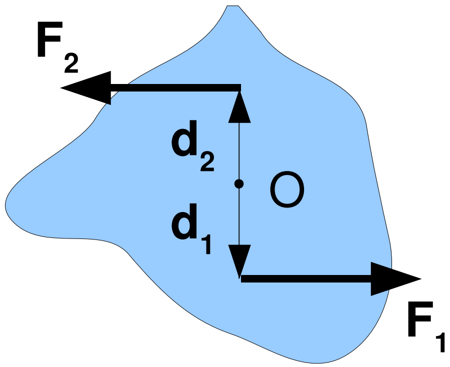
$$d\,\phi = \frac{dL}{L} = mgh\,\frac{dt}{L}$$

Da cui ricaviamo la frequenza di precessione Ω

$$\Omega = \frac{d\,\phi}{dt} = \frac{mgh}{L}$$

Condizioni di equilibrio statico

Un corpo puntiforme è in equilibrio statico se la somma delle forze che agiscono su di esso è nulla. Per quanto riguarda un corpo esteso, oltre alla somma delle forze deve annullarsi anche la somma dei momenti. Prendiamo ad esempio il caso di un corpo esteso su cui agiscono due forze uguali ma opposte come in figura.



Le due forze F_1 ed F_2 hanno lo stesso modulo F e le distanze d_1 e d_2 sono uguali a d. È ovvio allora che la somma delle forze sia nulla, ma l'esperienza ci dice che un corpo su cui agiscano tali forze si mette in rotazione attorno al punto O. Calcoliamo infatti la somma dei momenti rispetto ad O.

$$M_{TOT} = Fd + Fd = 2\mathrm{Fd}$$

Da cui ricaviamo l'accelerazione angolare

$$2\mathrm{Fd} = I_O \alpha$$

Da cui ricaviamo l'accelerazione angolare

$$\alpha = \frac{2\mathrm{Fd}}{I_O}$$

Se il corpo è accelerato non può essere in equilibrio. Le condizioni perché un corpo rigido sia in equilibrio quindi sono α=0 e a=0.