INGEGNERIA GESTIONALE
corso di Fisica Generale

Prof. E. Puddu

LEZIONE DEL 21 – 22 OTTOBRE 2008

Moti oscillatori

Moto armonico

Consideriamo una molla di costante elastica *k* a cui è collegato un corpo di massa *m*. La molla esercita sempre una forza di richiamo e quindi, che sia compressa o allungata, essa tende a richiamare il corpo di massa *m* verso la posizione di equilibrio. L'equazione di Newton per il sistema è

$$F(x) = -kx = ma$$

dalla quale possiamo ricavare l'accelerazione a cui è sottoposta la massa ad ogni posizione

$$a = -\frac{k}{m}x$$

come si vede l'accelerazione è opposta, istante per istante, alla posizione del corpo. Quindi ogniqualvolta il corpo si trovi in una certa posizione, esso viene accelerato nella posizione opposta!
Ogni qual volta abbiamo un corpo in moto con accelerazione opposta in segno alla posizione del corpo, allora il corpo si muove di moto armonico. Un moto armonico è un moto descritto dall'equazione

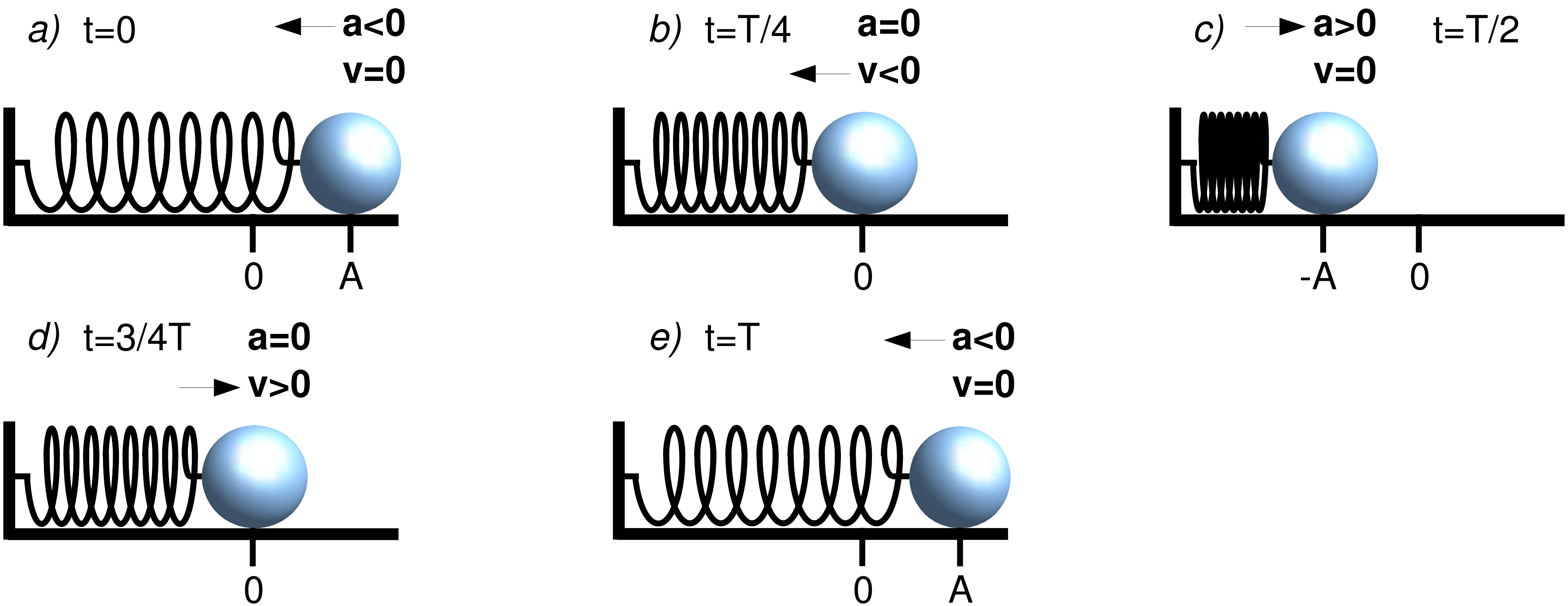
$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

dove

- A è l'ampiezza del moto
- ω è la pulsazione e si misura in rad/s
- ϕ è una costante di fase determinata dalle condizioni iniziali
- $\omega t+\phi$ è la fase del moto
- T è il periodo del moto, ovvero il tempo impiegato dalla massa *m* per tornare alla posizione da cui era partita
- *f* è la frequenza del moto, è l'inverso del periodo e la pulsazione divisa per 2π. $[f]=s^{-1}=Hz$.

Moto armonico

Analizziamo perché un'accelerazione costantemente opposta all'opposizione da un moto armonico



In *a)* la massa è inizialmente ferma in x=A, ma possiede un'accelerazione verso O. Giunta all'origine degli assi, *b)* il corpo ha accelerazione nulla, ma possiede ancora velocità per cui supera il punto O e prosegue di moto decelerato, in quanto l'accelerazione, sempre rivolta verso O, è opposta alla velocità. In *c)* il corpo si ferma finalmente alla posizione x=-A, ma l'accelerazione ora è elevata, di conseguenza il corpo è nuovamente accelerato nel verso delle x positive. Giunto ad O *d)*, possiede velocità diversa da zero, e quindi lo attraversa per tornare al punto di partenza di coordinata x=A, per ricominciare l'intero ciclo.

Il sistema massa molla

Il sistema massa-molla fornisce, come già visto, l'equazione di Newton

$$ma = -kx$$

sapendo che l'accelerazione è la derivata seconda dello spostamento rispetto al tempo, possiamo riscrivere l'equazione come

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

ovvero

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

e chiamando $\omega=(k/m)^{1/2}$ finalmente

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

Questa è un'equazione differenziale del secondo ordine, la cui soluzione è proprio

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

che, come abbiamo visto, è l'equazione che descrive il moto armonico.

LIUC

Velocità e accelerazione nel moto armonico

Velocità ed accelerazione di un corpo sono rispettivamente la derivata prima e seconda dello spostamento. Per il moto armonico ricaviamo

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

Dalla trigonometria sappiamo che le funzioni seno e coseno sono sfasate di 90°. Quindi lo sfasamento tra velocità e spostamento nel moto armonico sarà di 90°. Derivando ulteriormente la derivata prima ricaviamo l'accelerazione

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

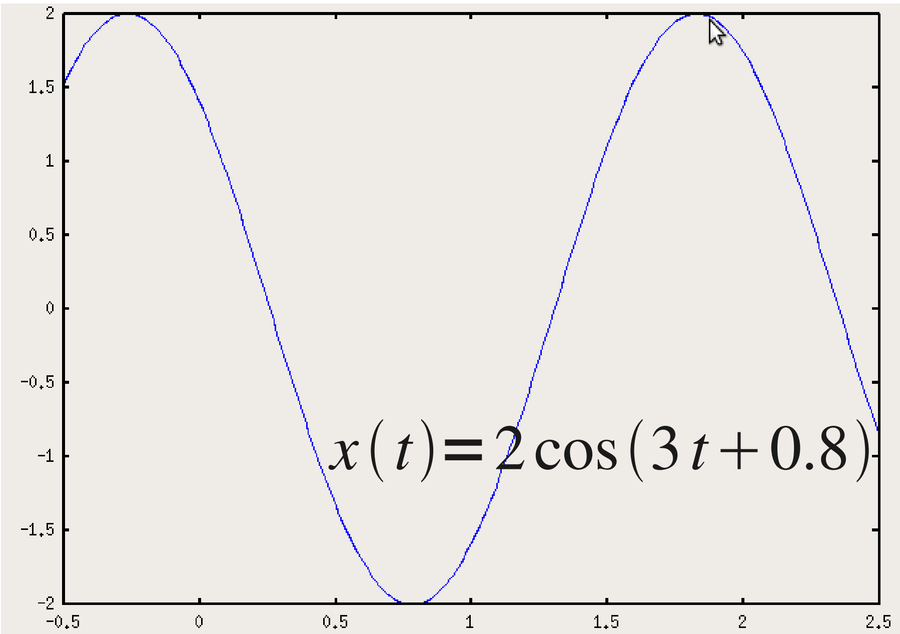
ovvero, come visto dall'equazione differenziale della slide precedente

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -\omega^2 x(t)$$

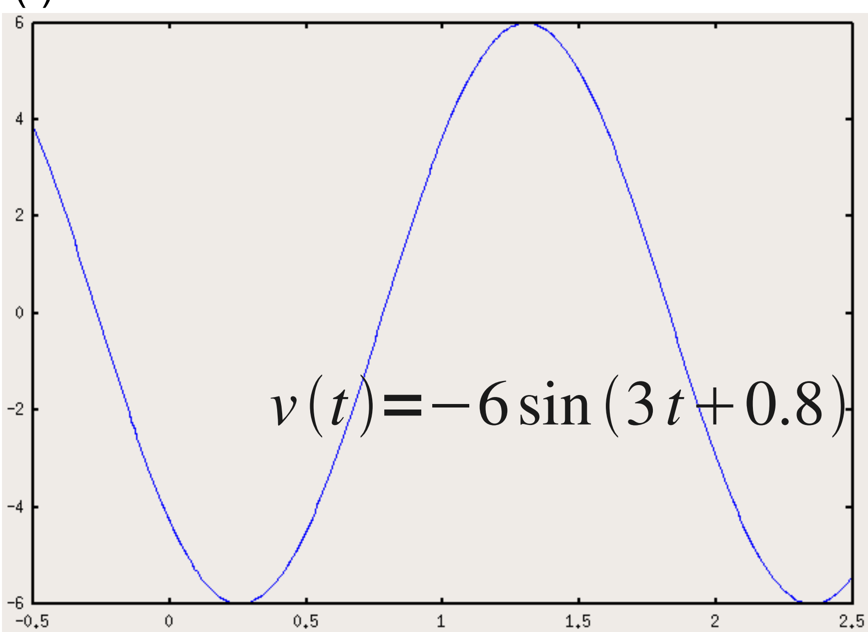
Poiché sin(x) e cos(x) oscillano tra -1 e 1, la posizione x(t) oscilla tra -A e +A, la velocità tra $-A\omega$ e $+A\omega$, l'accelerazione tra $-A\omega^2$ e $+A\omega^2$.

Grafici di spostamento, velocità e posizione

x(t)



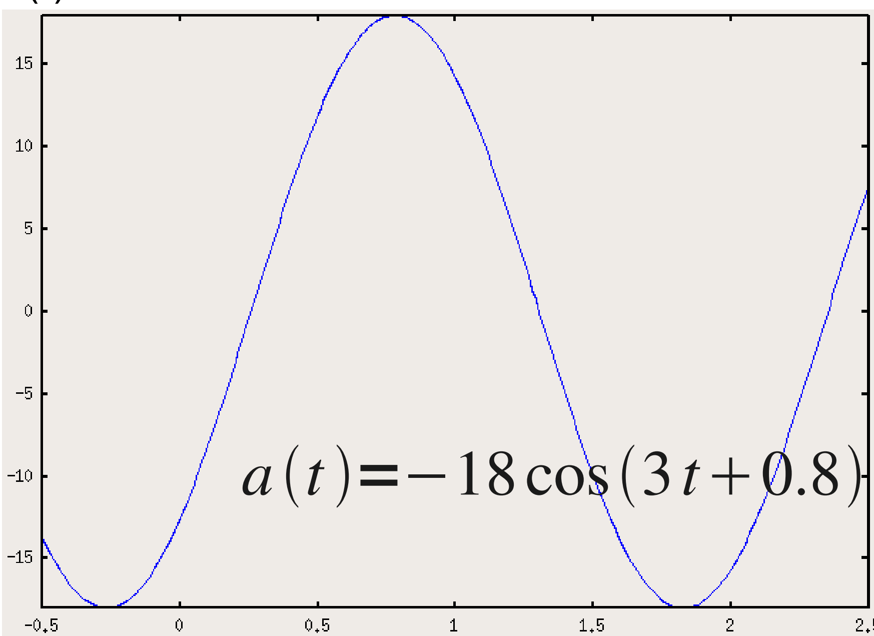
v(t)



In questi grafici è rappresentato il moto armonico

$$x(t) = 2\cos(3t + 0.8)$$

a(t)



ω=3 rad/s; f=0.48 Hz; T=2.09 s;
A=2 m, ϕ=0.8 rad

Determinazione dei parametri del moto armonico

Dato un sistema massa-molla, vogliamo descriverne le proprietà dal punto di vista matematico, ovvero ricavare i parametri per l'equazione

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Da osservazioni iniziali si ottengono la posizione al tempo zero x(0) e la velocità al tempo zero v(0). Sostituendo questi valori nelle equazioni per posizione e velocità ricaviamo

$$x(0) = A\cos(\phi)$$

$$v(0) = -A\omega\sin(\phi)$$

Elevando al quadrato le due equazioni e sommandole ricaviamo

$$A = \sqrt{x(0)^2 + \frac{v(0)^2}{\omega}}$$

mentre dividendo la seconda equazione per la prima otteniamo

$$\phi = -\arctan\left(\frac{v(0)}{x(0)\omega}\right)$$

Casi particolari di moto armonico

Nel moto armonico ci sono due casi particolari di semplice soluzione

1) Massa che all'istante t=0 si trova nella posizione x(0)≠0 con velocità nulla

$$A = x(0)$$
$$\phi = 0$$

da cui

$$x(t) = x(0)\cos(\omega t)$$

2) Massa che all'istante t=0 si trova nella posizione x(0)=0 con velocità v(0)≠0

$$A = \frac{v(0)}{\omega}$$
$$\phi = 90°$$

da cui ricaviamo

$$x(t) = \frac{v(0)}{\omega}\sin(\omega t)$$

Energia di un oscillatore armonico

Poiché K=1/2 mv^2 e U=1/2 kx^2, per il caso dell'oscillatore armonico ricaviamo

$$K = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$U = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

poiché $\omega=(k/m)^{0.5}$, l'espressione per l'energia cinetica diventa

$$K = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

L'energia meccanica del sistema quindi, definita come E=K+U, diventa

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2} k A^2$$

Punto per punto, dall'energia meccanica possiamo ricavare la velocità della massa m

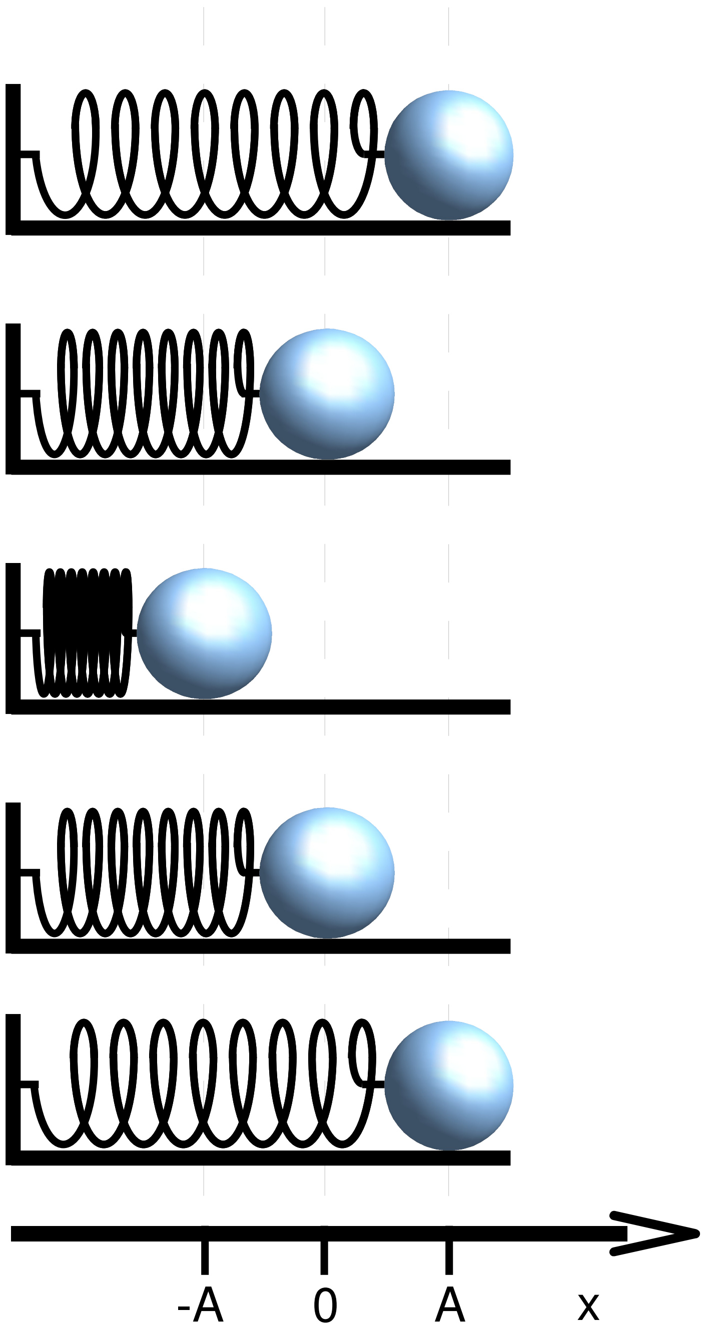
$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm \omega \sqrt{(A^2 - x^2)}$$

Energia di un oscillatore armonico

Il grafico nel tempo di K e U rispettivamente, è dato dalle funzioni in figura, dove per comodità sono stati scelti $\phi=0$, $A=1$. Il periodo è lo stesso delle funzioni precedenti.

Energia cinetica e potenziale sono funzioni di $\cos^2$ e $\sin^2$, quindi hanno periodo T/2. La loro somma, istante per istante, è uguale ad E. Questa è la ragione per cui quando K cresce, U decresce e viceversa.

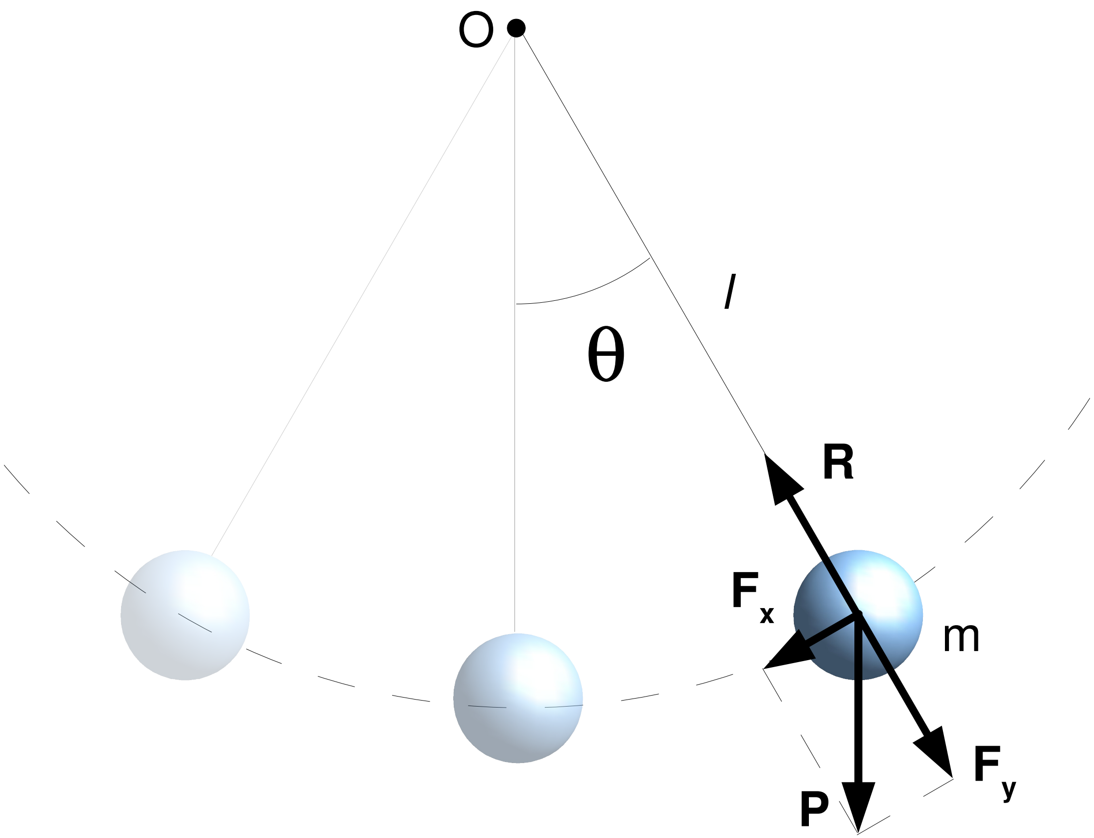
Riassunto delle proprietà del moto armonico



t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2} k A^2$
$\frac{T}{4}$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2} k A^2$	0
$\frac{T}{2}$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2} k A^2$
$\frac{3}{4} T$	0	ωA	0	$\frac{1}{2} k A^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2} k A^2$

Il pendolo

Il pendolo è un oggetto il cui moto è descritto dalla legge del moto armonico. Un pendolo è così costituito: una fune di lunghezza *l* inestensibile è imperniata ad un punto O per un estremo e collegata ad una massa M libera di muoversi all'altro estremo. La massa è inizialmente spostata dalla posizione di equilibrio (fune verticale) e quindi lasciata cadere. Il moto che ne risulta, in assenza di attriti, è proprio un moto armonico.



La forza peso si scompone in F_x ed F_y. L'ultima si elimina con la reazione vincolare R. La prima vale

$$mg\sin\theta$$

mentre l'arco di circonferenza *s* percorso dalla massa è

$$s = l\,\theta$$

L'equazione di Newton per il sistema è

$$-mg\sin\theta = m\frac{d^2 s}{dt^2}$$

dove il segno – è giustificato dal fatto che è una forza di richiamo.

Ponendo $s = l\,\theta$ e approssimando, per angoli piccoli il seno con il suo argomento otteniamo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

Il pendolo

L'equazione appena vista ha la stessa forma dell'equazione del moto armonico. La sua soluzione è quindi

$$\theta(t) = \theta_{max} \cos(\omega t + \phi)$$

dove $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Il periodo del pendolo invece è

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Come si vede, periodo e pulsazione del pendolo non dipendono dalla massa m ma solo dall'accelerazione di gravità *g* e dalla lunghezza *l* del pendolo!!!