INGEGNERIA GESTIONALE
corso di Fisica Generale

Prof. E. Puddu

LEZIONE DEL 22 OTTOBRE 2008

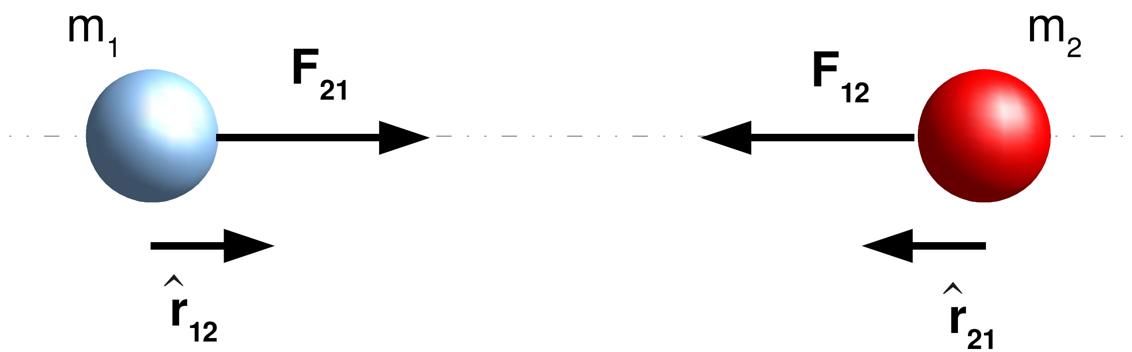
Gravitazione universale

Legge della gravitazione universale di Newton

Ogni particella attrae ogni altra particella con una forza direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della distanza reciproca

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

dove G=6,67 10^{-11} Nm^2/kg^2 è la costante gravitazionale universale ricavata per mezzo della bilancia a torsione di Cavendish. Per la terza legge di Newton, la forza con cui la massa m_1 attrae la massa m_2 è uguale ed opposta alla forza con cui la massa m_2 attrae la massa m_1.



Se $\mathbf{r}_{12}$ ed $\mathbf{r}_{21}$ sono i vettori unitari (o versori) che collegano le due masse, le due forze di figura saranno, rispettivamente

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}_{12}$$

$$\vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}_{21}$$

Legge della gravitazione universale di Newton

Dalle leggi appena viste possiamo capire che la forza gravitazionale diminuisce con il quadrato della distanza. Inoltre, Newton ha dimostrato, la forza generata da una massa sferica finita è uguale alla forza generata da un corpo puntiforme della stessa massa posto al centro della sfera.

Accelerazione di caduta libera e forza gravitazionale

Sappiamo che ogni corpo sulla superficie terrestre subisce l'accelerazione gravitazionale *g*. Uguagliando la legge della gravitazione universale alla forza di gravità possiamo ricavare un'espressione per *g*:

$$\cancel{m}\,g=-G\frac{M_T\,\cancel{m}}{r^2}$$

$$g=-G\frac{M_T}{r^2}$$

dove *r* è la distanza dal centro della Terra alla posizione del corpo. Questa legge ci dice che *g* non è una costante, ma varia con la distanza dal centro della Terra. Sapendo che la forma della è geoide e non sferica, avremo che *g* è maggiore ai poli e minore all'equatore.

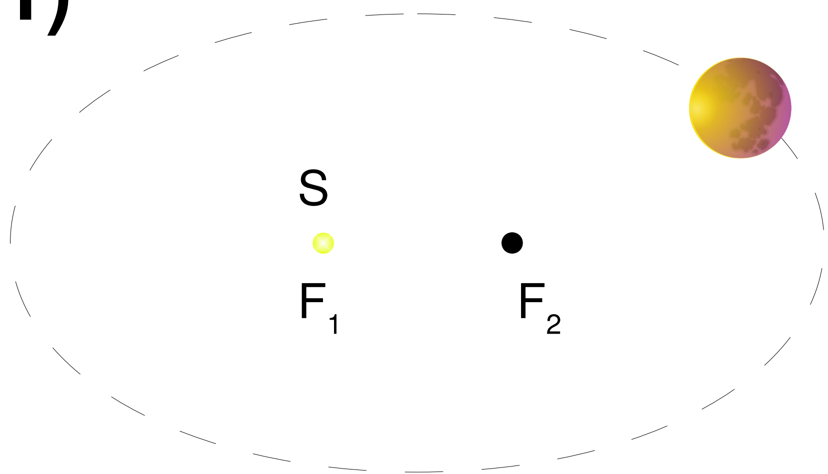
Qui di fianco l'immagine, esageratamente schiacciata ai poli, del pianeta Terra. Un corpo a quota *h* subisce una forza gravitazionale pari a

$$F_g=G\frac{M_T\,m}{(r+h)^2}$$

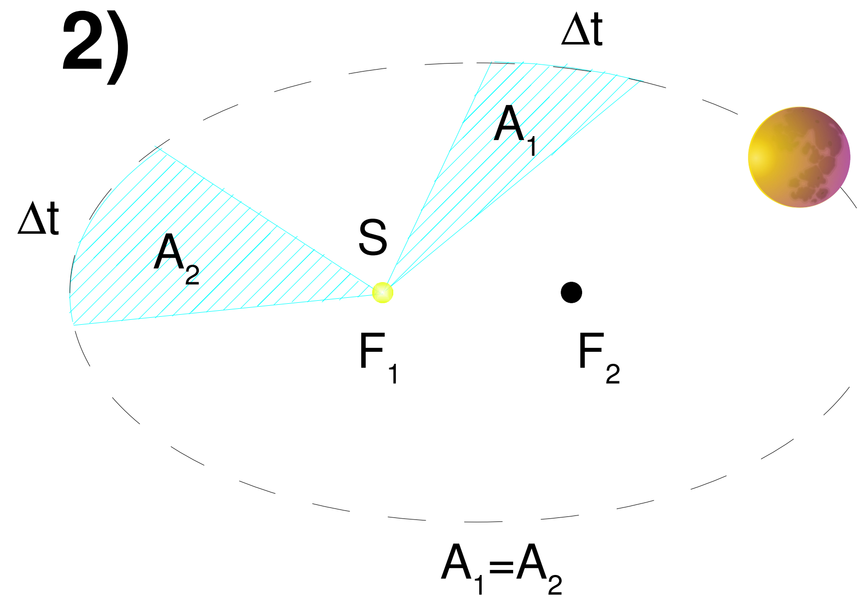
Leggi di Keplero

1.I pianeti del sistema solare si muovono su orbite ellittiche di cui il Sole occupa uno dei fuochi
2.Il raggio vettore che collega il Sole ad un pianeta descrive aree uguali in tempi uguali
3.Il quadrato del periodi orbitale di ogni pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'orbita ellittica.

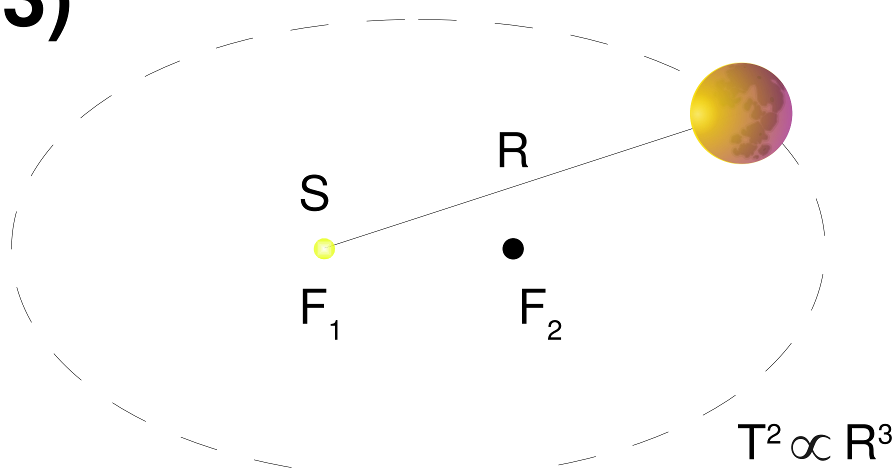
1)



2)



3)



La maggior parte delle orbite è in realtà praticamente circolare: per quanto riguarda Mercurio i semiassi differiscono dello 0.4%.
Per quanto riguarda la cometa di Halley invece i semiassi differiscono del 76%.

Terza legge di Keplero e forza centripeta

Dimostriamo ora la terza legge di Keplero per orbite circolari. Se un pianeta è costretto su orbita circolare, per la prima legge di newton esiste una forza (centripeta) che mantiene il pianeta sull'orbita, il quale altrimenti proseguirebbe di moto rettilineo e uniforme. Questa forza centripeta è proprio la forza di gravitazione universale:

$$G\frac{M_S m_p}{r^2} = m_p \frac{v^2}{r}$$

Dove $v=2\pi r/T$ è la velocità tangenziale del pianeta.

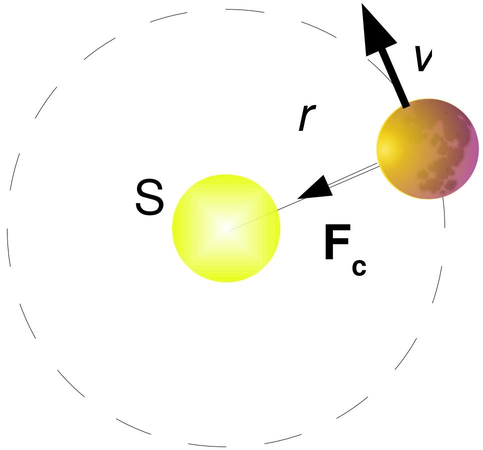
Da cui

$$G\frac{M_S}{r^2} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2 r}$$

Ed infine

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{G M_S}\right) r^3$$

Questa legge, dimostrata per orbite circolari, è in realtà valida anche per orbite ellittiche!!!



Seconda legge di Keplero e conservazione del momento angolare

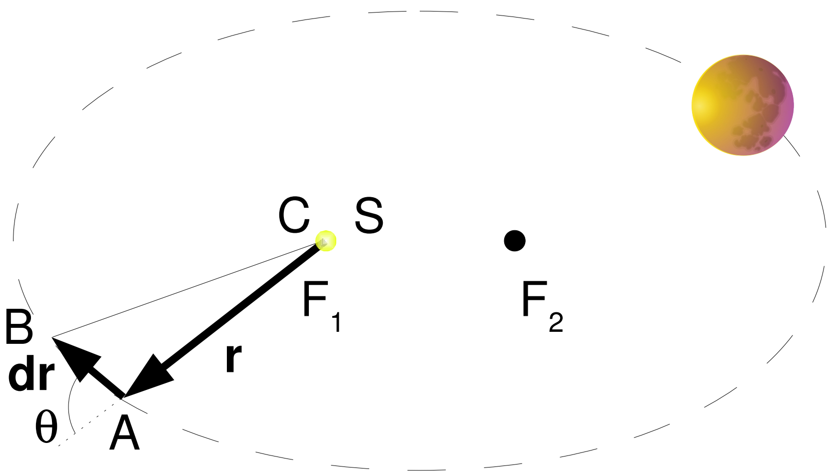
La seconda legge di Keplero deriva dalla conservazione del momento angolare. Il momento angolare si conserva in quanto la forza di attrazione tra un pianeta ed il Sole è sempre diretta verso il centro, ovvero parliamo di forze radiali. Quindi il prodotto vettoriale tra raggio e forza stessa è nullo!

$$M = RF\, sin0° = 0$$

Poiché il momento angolare è costante se la somma dei momenti meccanici è nulla, avremo che

$$L = mvR sin\theta = cost$$

dove m, v sono la massa e la velocità del pianeta.



Calcoliamo ora l'area del triangolo ABC in figura. Essa è rdrsinθ. Ma poiché dr=vdt, l'area è

$$dA = rv \sin\theta\, dt$$

e quindi

$$\frac{dA}{dt} = rv \sin\theta$$

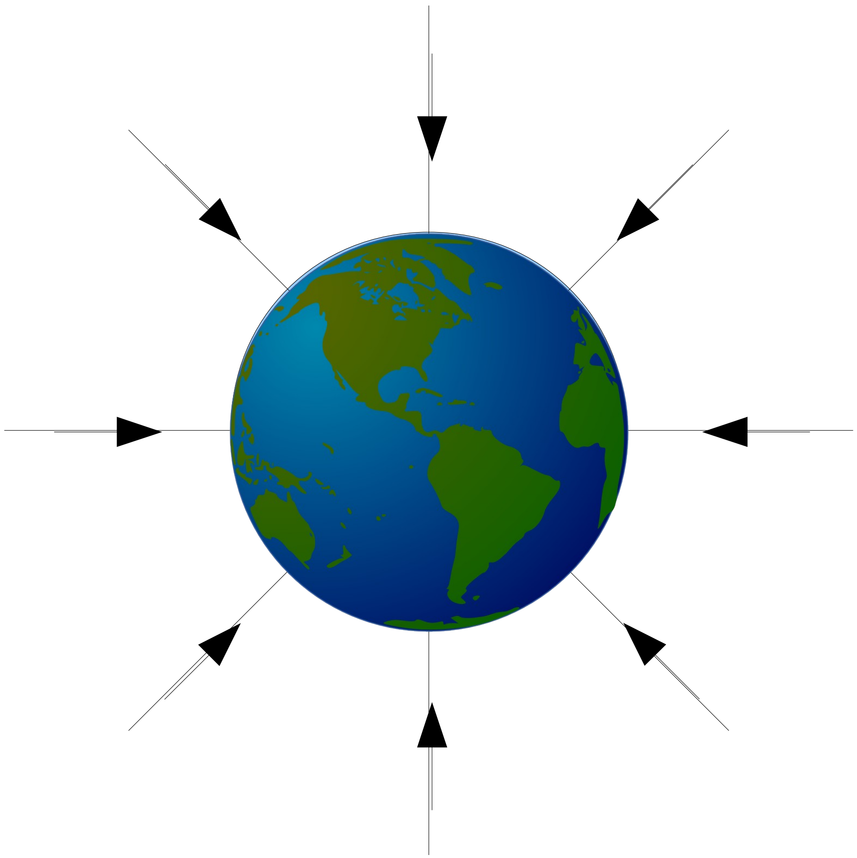
ovvero

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{m}$$

Poiché L e m sono due costanti, la derivata prima dell'area spazzata dal raggio vettore che collega il Sole al pianeta è costante, per cui l'area è una funzione lineare nel tempo e di conseguenza in intervalli di tempo uguali il raggio vettore spazzerà aree uguali!

Il campo gravitazionale

Sappiamo che sulla terra la forza gravitazionale agente su un corpo di massa m è P=mg. Eguagliando questa alla legge della gravitazione di Newton abbiamo ricavato un'espressione per g. Poiché l'accelerazione di gravità è indipendente dal corpo che la subisce, chiamiamo "campo gravitazionale" il vettore **g**.
Esso è un campo sempre attrattivo ed è schematizzato, per la massa M che lo genera, con delle linee di campo entranti, che danno appunto il verso dell'accelerazione di gravità.

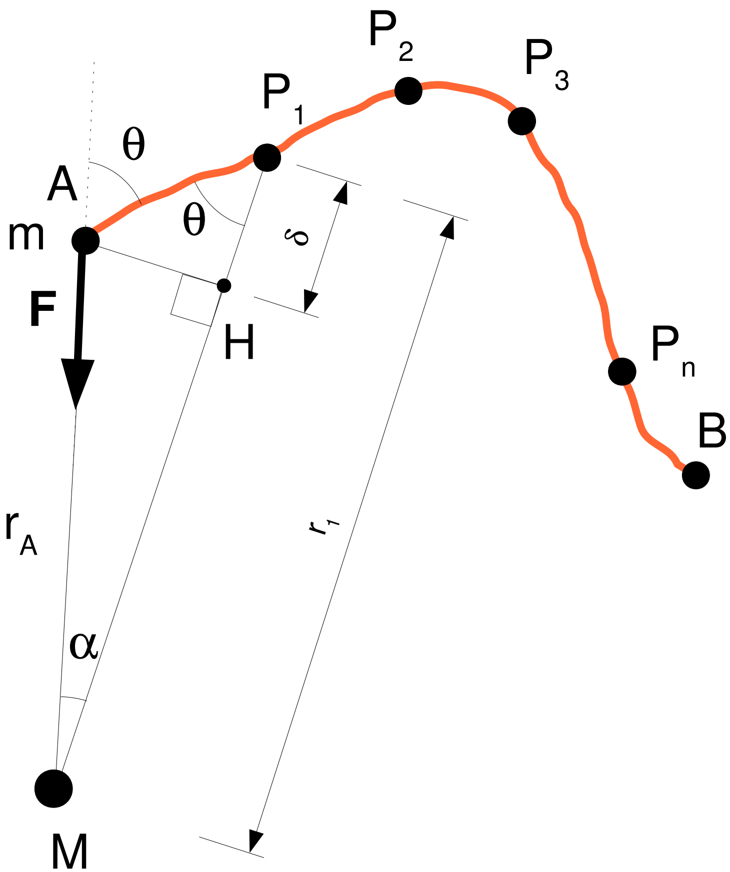


$$\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\hat{r}$$

Quest'espressione del campo ci dice che **g** è diretta radialmente, ma con direzione verso il centro della Terra (o di un altro corpo preso in esame).

Il campo gravitazionale come campo conservativo

Finora abbiamo visto che, con **g** costante, il campo gravitazionale è conservativo. Col l'espressione vista nella slide precedente, dobbiamo mostrare nuovamente questa proprietà!



Supponiamo, come accade in figura, che una massa *m* si muova all'interno del campo gravitazionale della massa *M* dalla posizione di partenza A alla posizione di arrivo B. Poiché la forza gravitazionale non è costante, dividiamo la traiettoria in tratti abbastanza piccoli in cui il cammino possa considerarsi rettilineo e la forza F costante. Il lavoro L_{AB} si ottiene sommando tutti i lavori della partizione. I punti P_i sono gli estremi dei tratti su cui calcoliamo il lavoro. Per α molto piccolo avremo che $r_1=r_A+\delta$. Per la definizione di lavoro avremo che

$$W_{AP1}=\vec{F}\cdot\vec{AP}_1=-F\;AP_1\cos(180°-\theta)$$
$$=F\,\delta$$

Considerato che F è data dalla legge di gravitazione universale e che δ è molto piccolo, $r_A^2 \sim r_A r_1 \sim r_1^2$

$$W_{AP1}=G\frac{Mm}{r_A r_1}(r_1-r_A)$$

da cui

$$W_{AP1}=G\frac{Mm}{r_A}-G\frac{Mm}{r_1}$$

Il campo gravitazionale come campo conservativo

In modo analogo si calcolano i lavori parziali dei singoli segmenti della traiettoria, da cui il lavoro totale

$$W_{AB} = W_{AP1} + W_{P1P2} + \ldots + W_{PnB} =$$

$$= G\frac{Mm}{r_A} - G\frac{Mm}{r_1} + G\frac{Mm}{r_1} - G\frac{Mm}{r_2} + \ldots - G\frac{Mm}{r_B}$$

da cui si vede che ci sono termini uguali che si possono semplificare, dando come risultato finale

$$W_{AB} = G\frac{Mm}{r_A} - G\frac{Mm}{r_B}$$

Quindi, il lavoro delle forze del campo gravitazionale è indipendente dalla traiettoria ma dipende solo dalla posizioni iniziale e finale. Con questo concludiamo che il campo elettrico è conservativo!!!

Inoltre concludiamo che ogni campo centrale è conservativo. Definiamo come potenziale gravitazionale (dalla relazione W=-ΔU)

$$U = -G\frac{Mm}{r}$$

Nota che questo vale solo al di sopra della superficie terrestre.

Considerazioni su moto di pianeti e satelliti

L'energia meccanica di un pianeta intorno al sole è

$$E = K + U = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M_S m}{r}$$

poiché K ed U sono discordi, E può essere positiva, negativa o nulla. Per l'orbita circolare per esempio abbiamo

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{M_S m}{r^2} \rightarrow \frac{1}{2} mv^2 = G \frac{M_S m}{2\mathrm{r}}$$

da cui notiamo che K=1/2 U che, sostituito nell'espressione di E ci da

$$E = -G \frac{M_S m}{2\mathrm{r}}$$

Questa è l'energia per orbite circolari. Abbiamo altre condizioni di energia:

orbite ellittiche (orbita chiusa) $$-G \frac{M_S m}{2\mathrm{r}} < E < 0$$

orbite paraboliche (orbita aperta) $$E = 0$$

orbite iperboliche (orbita aperta) $$E > 0$$