"Progettazione e Gestione della Supply Chain"

UNIVERSITÀ CATTANEO CASTELLANZA

Facoltà di Ingegneria

LE RETI DISTRIBUTIVE (2): criteri di modellizzazione

Prof. Fabrizio Dallari

Direttore C-log
Università C. Cattaneo LIUC

Centro di Ricerca sulla Logistica

INDICE

- Le metodologie di modellizzazione delle reti
- Richiami di PL
- Transportation Problem
- Facility Location & Site Selection
- Capacity Allocation & Facility Location

PROGRAMMAZIONE LINEARE

- E' una tecnica di Ricerca Operativa di supporto alla presa di decisioni
- Viene usata per determinare **l'allocazione/bilanciamento ottimale delle risorse** in un contesto di **breve termine** in cui non è modificabile la disponibilità di risorse
- Le risorse in gioco sono denaro, tempo, spazio, materie prime, manodopera, etc.
- Gli ambiti di utilizzo della PL sono i più disparati:
  - Pianificazione della produzione (mix fattori di produzione che minimizza costi, scrap, etc.)
  - Allocazione / localizzazione di impianti e magazzini (cosa produrre dove e quanto)
  - Pianificazione della distribuzione (quali clienti servire a partire da quali depositi)
  - Schedulazione di attività e bilanciamento risorse (piano di lavoro, missioni di picking, etc.)
  - Routing / sequencing di percorsi o di attività (cicli di lavorazione, percorsi veicoli, etc.)
  - Gestione delle scorte multiarticolo (quando/quanto riordinare con vincolo spazio)
  - Ottimizzazione di ricette (scelta del mix di carico)
  - Scelta portafoglio investimenti
  - ...

PROGRAMMAZIONE LINEARE

CARATTERISTICHE DI UN PROBLEMA DI PL (1)

Funzione obiettivo (f.o): in generale la PL è uno strumento di ottimizzazione, in cui esiste una funzione che deve essere massimizzata (ad es. profitto, NPV, etc.) o minimizzata (ad es. costi, scarti, etc.)

Variabili decisionali (x_i): rappresentano le leve su cui il decisore può agire con l'obiettivo di trovarne il valore ottimale (ad es. quantità da produrre, numero di operatori necessari, etc.). Nei problemi di PL le variabili sono continue (in caso contrario di parla di *Programmazione Intera*)

Vincoli: sono le limitazioni che restringono il campo di esistenza delle variabili ossia il *range* entro cui sono ammesse le soluzioni. Possono essere : ≤ (evidenzia un limite superiore), ≥ (evidenzia un limite inferiore), = (evidenzia una relazione fissata tra le variabili)

PROGRAMMAZIONE LINEARE

CARATTERISTICHE DI UN PROBLEMA DI PL (2)

Regione ammissibile: rappresenta il luogo di tutte le combinazioni possibili delle variabili decisionali (nel caso di problemi lineari) contiene infinite soluzioni

Parametri/coefficienti: sia la funzione obiettivo sia le relazioni di vincolo (dis/equazioni) sono formate dalle variabili decisionali, da parametri e da coefficienti d'impiego. Questi ultimi sono valori fissati assunti con certezza

Linearità: la funzione obiettivo e le relazioni di vincolo devono essere scritte in forma lineare (ad esempio non è ammesso $x_1 \cdot x_2$ o x_1^3) sono proporzionali e additive (ad es. il valore della f.o. di profitto equivale alla somma dei profitti generati da x_1, x_2, ...)

Positività: questa assunzione equivale a dire che le variabili decisionali devono essere positive o nulle (ad es. non ha senso produrre una quantità negativa di un certo prodotto. Pertanto occorre indicare : $x_i \geq 0$)

PROGRAMMAZIONE LINEARE

CARATTERISTICHE DI UN PROBLEMA DI PL (3)

Simbologia:

x_j = quantità di prodotto j-esimo (j = 1,...,n)

f_i = consumo del fattore produttivo i-esimo (i = 1,...,m)

b_i = quantità max disponibile del fattore produttivo i-esimo

c_j = costo unitario di produzione

P_j = prezzo unitario di vendita

a_{ij} = coefficienti di impiego (= tassi di assorbimento dei fattori)

$$\boxed{a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}}$$

PROGRAMMAZIONE LINEARE

FORMULAZIONE DI UN PROBLEMA DI PL

Step 1 - Definire le variabili decisionali *(che cosa bisogna decidere ?)*

devono essere esplicitate in modo preciso, sia come descrizione che come unità di misura. Ad es. x_1 = numero di pezzi dell'articolo 1 prodotti mensilmente [pz/mese]

Step 2 - Formulare la funzione obiettivo *(che cosa si deve massimizzare o minimizzare?)*

definire una equazione in termini di combinazione lineare delle variabili decisionali devono rientrare nella funzione obiettivo

$$\min z_c = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \max z_P = \sum_{j=1}^{n} (P_j - c_j) \cdot x_j$$

c_j = costante

P_j = costante

Step 3 - Formulare le relazioni di vincolo *(cosa limita il valore delle variabili decisionali ?)*

definire le disequazioni o le equazioni di vincolo identificando i parametri o coefficienti di impiego per ciascuna variabile decisionale. Porre attenzione all'unità di misura (ad es. x_1 è espresso in pz/mese e si ha un limite espresso in pz/anno). Indicare altresì le condizioni di non negatività

PROGRAMMAZIONE LINEARE

FORMULAZIONE DI UN PROBLEMA DI PL

Presenza di vincoli che limitano le possibilità di perseguire l'obiettivo (es. disponibilità risorse, ...)

i = 1 $\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$

i = 2 $\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$

....

i = m $\quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$

colonna *= consumo degli m fattori per produrre la quantità x_j*

riga *= bilancio di un fattore i*

Esprime i legami tecnologici tra impieghi e risorse

+ ULTERIORI CONDIZIONI DI VINCOLO

$$x_j \geq 0 \qquad \text{per } j = 1,\ldots,n$$

Esprime le condizioni di non-negatività

IL CASO "SCARPACOMODA"

DATI DEL PROBLEMA

2 modelli di scarpe :
- **Lusso** € 4/paia
- **Casual** € 3/paia

} Margine unitario

Magazzino cuoio

800 paia/gg

Reparto 1
- modello *Lusso* richiede tempo lavorazione doppio rispetto a *Casual*
- max 1000 paia/gg (se fossero tutte *Casual)*

Reparto 2 Finitura Lusso

400 paia/gg

Reparto 2 Finitura Casual

700 paia/gg

Qual è il mix di scarpe Lusso e Casual che massimizza il profitto dell'azienda ?

IL CASO "SCARPACOMODA"

IMPOSTAZIONE ANALITICA DEL PROBLEMA

Variabili:

x_1 = produzione giornaliera Lusso [paia/gg]

x_2 = produzione giornaliera Casual [paia/gg]

Funzione obiettivo: max ($z = 4\,x_1 + 3\,x_2$) [€/gg]

Funzioni di produzione:

Capacità Reparto finitura Lusso : $x_1 \leq 400$ [paia/gg]

Capacità Reparto finitura Casual : $x_2 \leq 700$ [paia/gg]

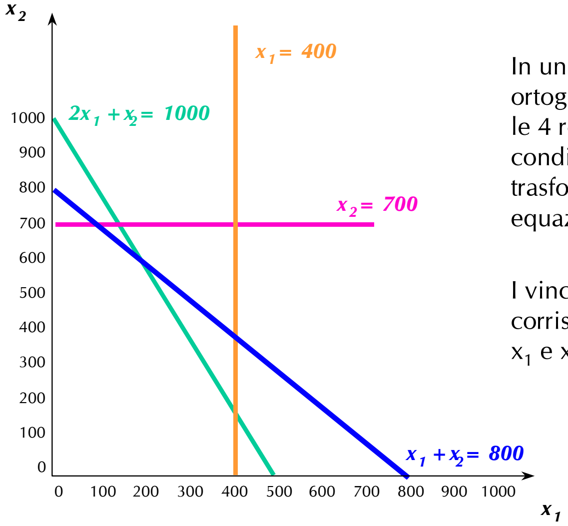
Capacità produttiva Reparto 1: $2\,x_1 + x_2 \leq 1000$ [paia/gg]

Limiti sulle risorse Disponibilità Magazzino cuoio: $x_1 + x_2 \leq 800$ [paia/gg]

Altri limiti $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$ [paia/gg]

IL CASO "SCARPACOMODA"

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEL PROBLEMA

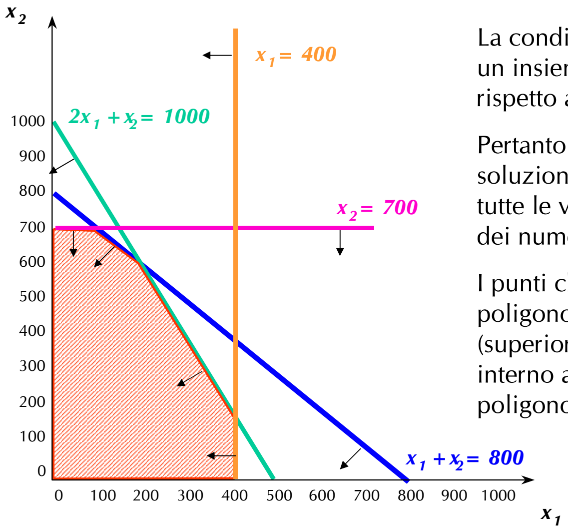


In un sistema di assi cartesiani ortogonali (x_1, x_2) è possibile tracciare le 4 rette che corrispondono alle condizioni di vincolo, ottenute trasformando le disequazioni in equazioni ($\leq \rightarrow =$)

I vincoli di non negatività corrispondono ai due assi cartesiani x_1 e x_2

IL CASO "SCARPACOMODA"

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLA REGIONE AMMISSIBILE



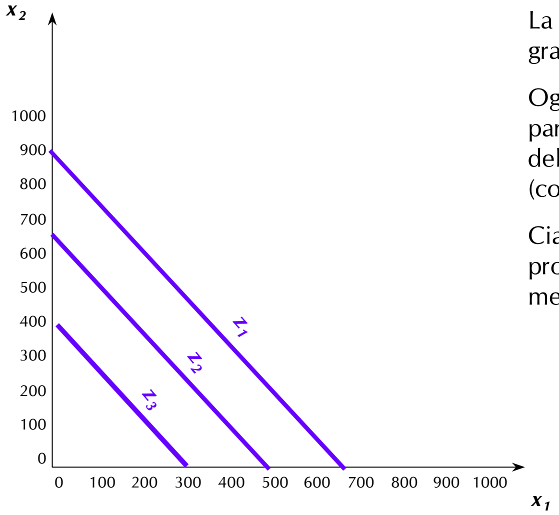
La condizione di disuguaglianza individua un insieme di punti tutti dalla stessa banda rispetto ad una retta nel piano

Pertanto si ottiene un poligono delle soluzioni possibili, che sono infinite se le tutte le variabili appartengono all'insieme dei numeri reali (dominio continuo)

I punti che si trovano sugli angoli del poligono contengono la soluzione ottima (superiore rispetto a qualsiasi altro punto interno alla regione o su un lato del poligono)

IL CASO "SCARPACOMODA"

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLA FUNZIONE OBIETTIVO



La funzione obiettivo corrisponde graficamente ad un fascio di rette

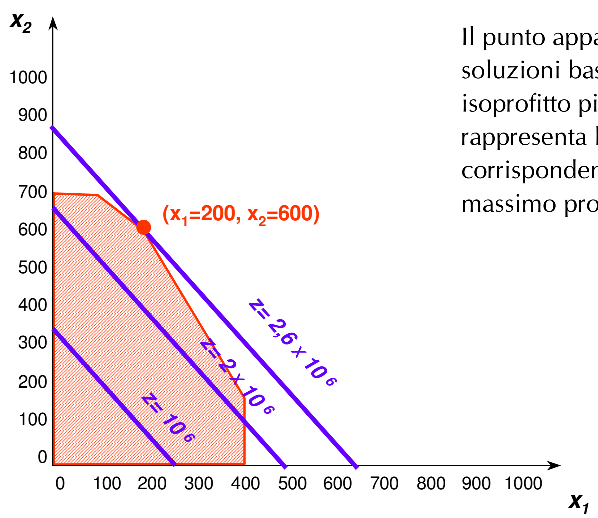
Ogni retta ha inclinazione costante pari al rapporto tra i due parametri della funzione obiettivo (coeff. angolare = - 4/3)

Ciascuna retta è una curva "iso-profitto" (luogo dei punti con il medesimo valore della f.o. "Z")

$$z = 4\,x_1 + 3\,x_2$$

IL CASO "SCARPACOMODA"

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELLA SOLUZIONE OTTIMA



Il punto appartenente al poligono delle soluzioni base intersecato dalla retta isoprofitto più distante (maggiore Z) rappresenta la soluzione ottima in corrispondenza della quale si ha il massimo profitto (z = 2.600)

PROGRAMMAZIONE LINEARE

FORMALIZZAZIONE DI UN PROBLEMA DI PL

- Il poligono delle soluzioni possibili è convesso in quanto ottenuto per successive eliminazioni di semipiani
- La soluzione ottima si trova necessariamente sul confine del poligono (su un lato o su un vertice) : in definitiva si avranno una sola o infinite soluzioni ottime (in quest'ultimo caso la retta iso-profitto è parallela alla retta di un vincolo)
- Se la soluzione ottima è unica, essa è anche una soluzione base
- Per trovare la soluzione ottima, non è necessario esplorare l'intero campo delle soluzioni possibili, ma ci si può limitare all'insieme delle soluzioni base ("Metodo del Simplesso)"

PROGRAMMAZIONE LINEARE

FORMALIZZAZIONE DI UN PROBLEMA DI PL

Aggiungendo le variabili di *slack* (S_i) per ciascuna relazione di vincolo, si determina un sistema di "m" equazioni con "n" incognite ($x_1 \ldots x_n$)

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + S_1 = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + S_2 = b_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + S_m = b_m
\end{aligned}
$$

$$x_j \geq 0 \qquad \text{per } j = 1,\ldots, n$$

PROGRAMMAZIONE LINEARE

FORMALIZZAZIONE DI UN PROBLEMA DI PL

- **n** **incognite proprie:** $x_1, \dots, x_n$
- **m** **variabili di *slack* (una per vincolo):** $S_1, \dots, S_m$
- **Il poliedro delle soluzioni è delimitato da piani di equazione:**

  $x_i = 0$ *(piani coordinati)*

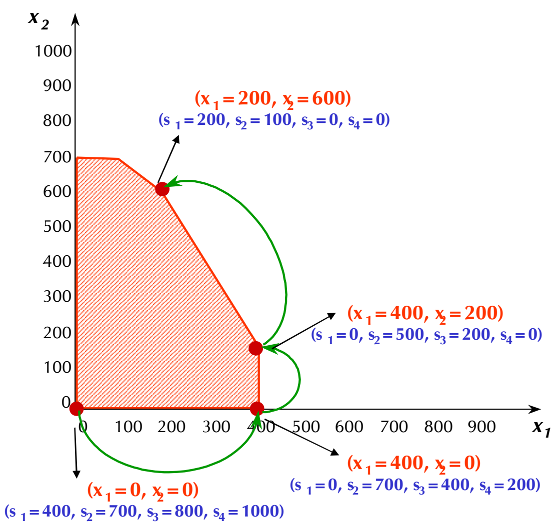
  $S_j = 0$ *(piani di limitazione)*

- **Ogni soluzione base è individuata da "*n*" relazioni del tipo:**

  $x_i = 0$ **oppure** $S_j = 0$

IL CASO "SCARPACOMODA"

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEL METODO DEL SIMPLESSO



Si parte da una delle soluzioni base e si calcola il valore della f.o. Z. Ci si sposta verso la successiva soluzione base e si calcola nuovamente il valore della f.o. Z.

L'algoritmo termina quando non ci sono più miglioramenti della f.o.

Il problema in esame è indeterminato in quanto è un sistema di 4 equazioni in 6 incognite (x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, S_4)

La soluzione ottima coincide con la completa saturazione della capacità produttiva del Reparto 1 ($S_3 = 0$) e con il consumo di tutto il cuoio ($S_4 = 0$) che rappresentano i due vincoli stringenti

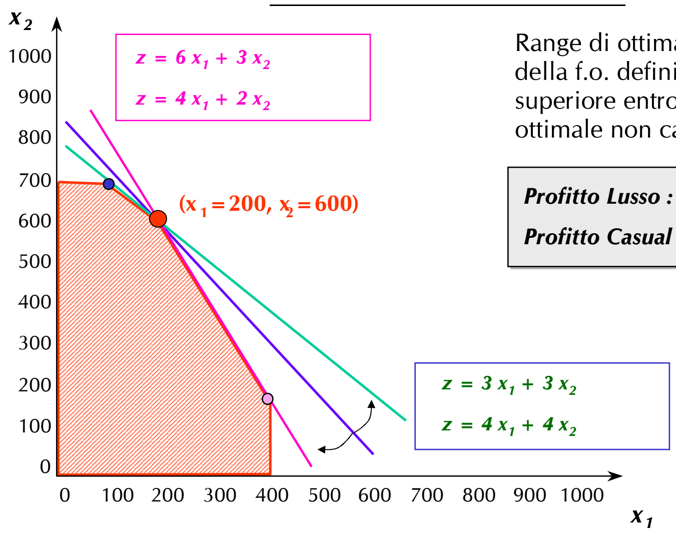
IL CASO "SCARPACOMODA"

ANALISI DI SENSITIVITA'

- Una volta che si è modellizzato un problema e che si è determinata la soluzione ottimale, occorre validare la robustezza della soluzione al variare dei parametri del modello e dei coefficienti di impiego.
- L'analisi di sensitività consente di introdurre il concetto di "incertezza" nel modello di PL, in quanto la maggior parte dei parametri sono delle "stime" e non dei valori deterministici (ad es. tempo di assemblaggio di un pezzo da parte di un operaio)
- Tuttavia è necessario partire da una soluzione base (parametrizzata con valori medi o standard) e da qui rispondere a domande del tipo "what-if" modificando di volta in volta alcuni parametri chiave
- Attenzione ! Ovviamente non è pensabile valutare tutte le possibili soluzioni derivanti dalla variazione di tutti i parametri. Ad esempio, in un modello a 10 variabili decisionali $x_1 \ldots x_{10}$, per ciascuna delle quali si vogliono ipotizzare 3 valori del costo unitario di produzione (min, med, max) richiederebbe di valutare 3^{10} (= 59.049) soluzioni

IL CASO "SCARPACOMODA"

ANALISI DI SENSITIVITA'



Range di ottimalità dei coefficienti della f.o. definisce il limite inferiore e superiore entro i quali la soluzione ottimale non cambia

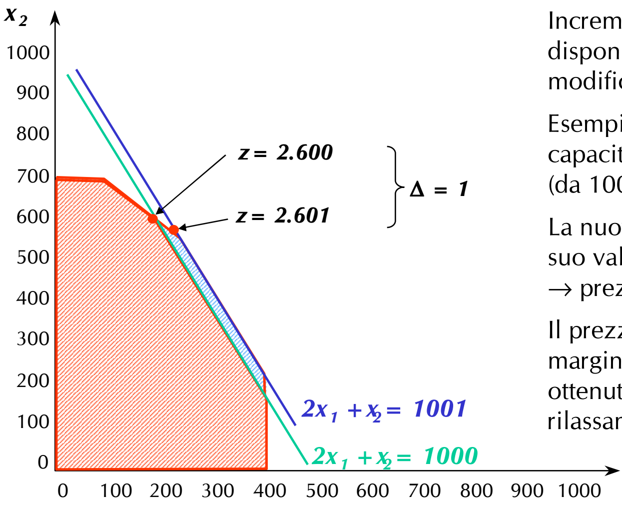
Profitto Lusso : 3 - 4 - 6

Profitto Casual : 2 - 3 - 4

base

IL CASO "SCARPACOMODA"

ANALISI DI SENSITIVITA'



Incremento / decremento di disponibilità delle risorse (si modificano i valori di vincolo)

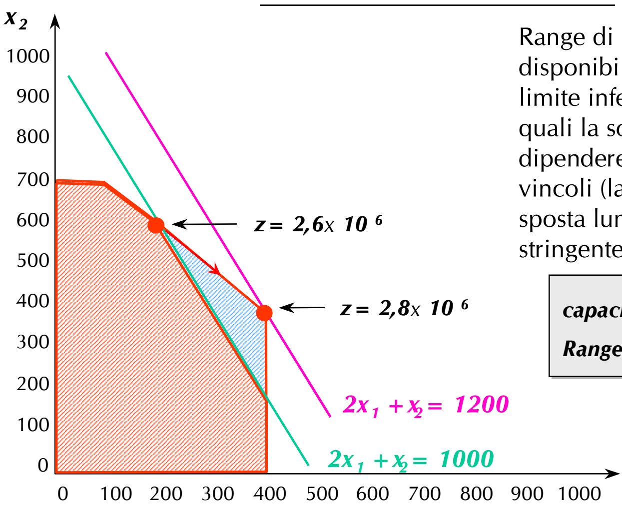
Esempio: aumento di 1 unità della capacità produttiva del Reparto 1 (da 1000 a 1001 paia/gg)

La nuova isoprofitto incrementa il suo valore di 1000 lire/gg
→ prezzo ombra (*shadow price)*

Il prezzo ombra è l'incremento marginale del valore della f.o. Z ottenuto in corrispondenza del rilassamento di 1 unità del vincolo

IL CASO "SCARPACOMODA"

ANALISI DI SENSITIVITA'



Range di incremento/decremento di disponibilità delle risorse definisce il limite inferiore e superiore entro i quali la soluzione ottimale continua a dipendere dalla stessa coppia di vincoli (la soluzione ottimale si sposta lungo l'equazione del vincolo stringente che rimane inalterato)

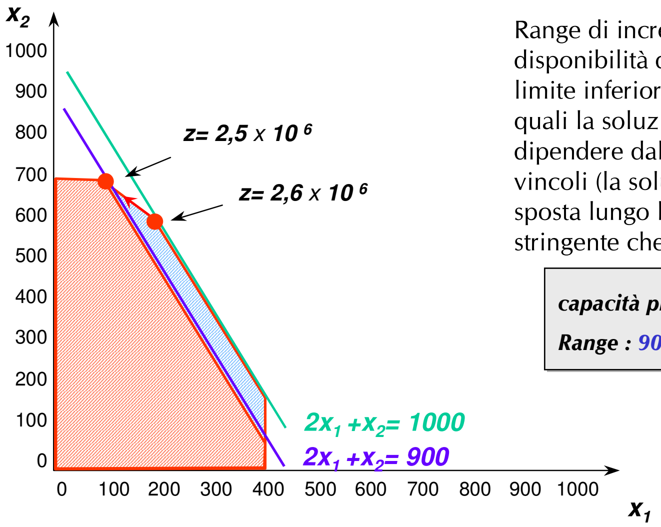
capacità produttiva Reparto 1

Range : 900 - 1000 - 1200

base

IL CASO "SCARPACOMODA"

ANALISI DI SENSITIVITA'



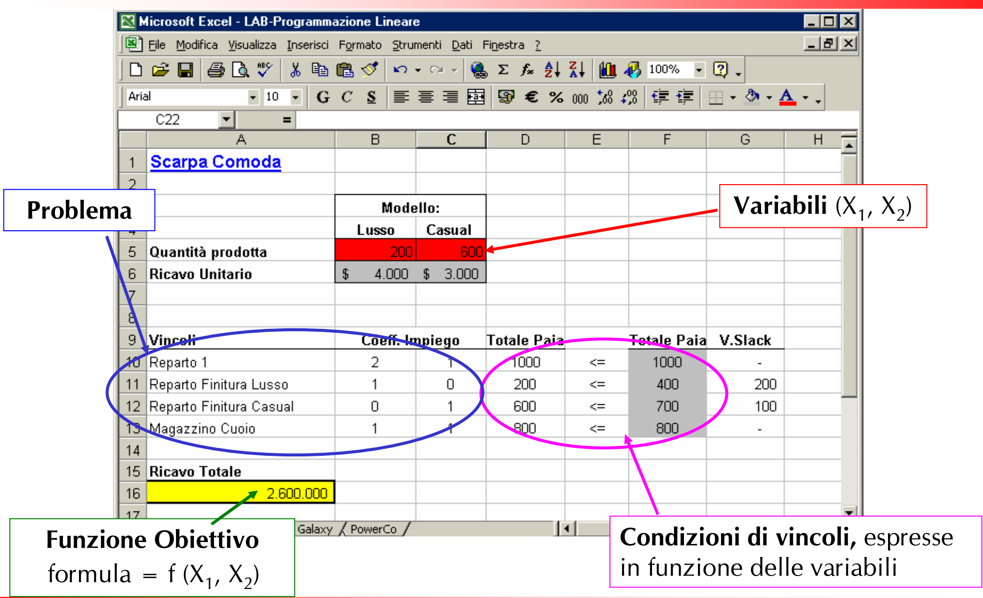
Range di incremento/decremento di disponibilità delle risorse definisce il limite inferiore e superiore entro i quali la soluzione ottimale continua a dipendere dalla stessa coppia di vincoli (la soluzione ottimale si sposta lungo l'equazione del vincolo stringente che rimane inalterato)

capacità produttiva Reparto 1

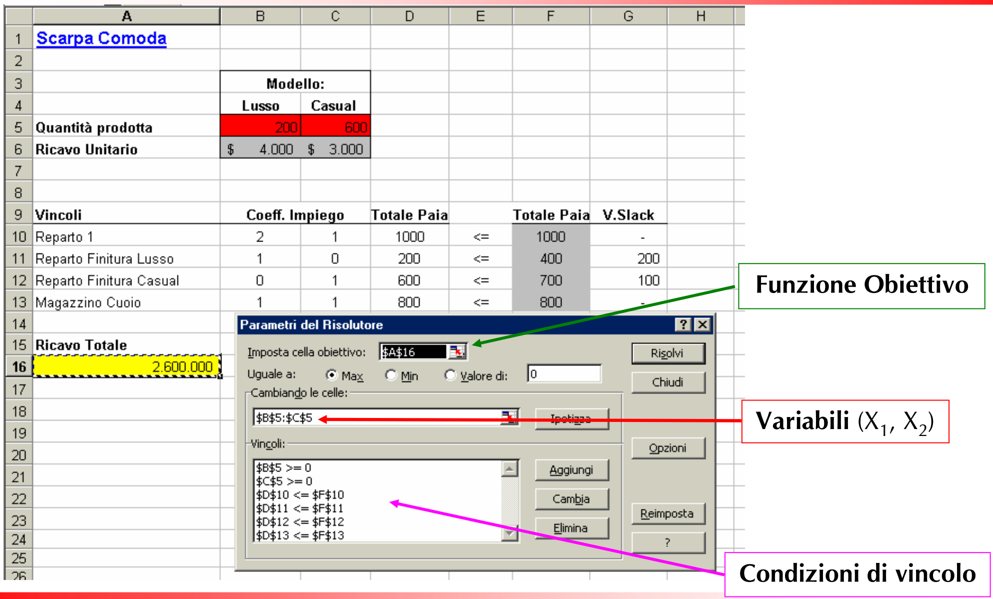
Range : 900 - 1000 - 1200

base

PROGRAMMAZIONE LINEARE CON EXCEL



PROGRAMMAZIONE LINEARE CON EXCEL



	A	B	C	D	E	F	G
1	Scarpa Comoda						
2							
3		Modello:					
4		Lusso	Casual				
5	Quantità prodotta	200	600				
6	Ricavo Unitario	$ 4.000	$ 3.000				
7							
8							
9	Vincoli	Coeff. Impiego		Totale Paia		Totale Paia	V.Slack
10	Reparto 1	2	1	1000	<=	1000	-
11	Reparto Finitura Lusso	1	0	200	<=	400	200
12	Reparto Finitura Casual	0	1	600	<=	700	100
13	Magazzino Cuoio	1	1	800	<=	800	-
14							
15	Ricavo Totale						
16	2.600.000						

Le reti distributive (2)