ANALISI DEI DATI SPERIMENTALI E STATISTICA
Parte III
Prova Intermedia

Problema 1 (4 punti)
Una variabile casuale X è distribuita secondo una distribuzione beta di parametri alfa=3 e beta=4 , sull’intervallo [0,5].
Calcolare il suo valore medio e la sua varianza (4 punti)

Problema 2 (4 punti)

Una variabile casuale è distribuita secondo una distribuzione gamma di parametri alfa e beta.
Trovare i valori di alfa e beta tali che la varianza della variabile sia 100 e il valore atteso sia 10.

Problema 3 (8 punti)
Gli arrivi ad un supermercato si sugìsseguono ad un tasso lambda=150/ora.
1) Quanto è il tempo medio di attesa tra un cliente e l’altro? Perchè? (2 punti)
2) Quanto occorre attendere per il 50mo cliente? Perchè? (2 punti)

3) Qual è l'espressione della probabilità che arrivino più di 1000 clienti in un giorno? (2 punti)
4) State osserevando le vendite del prodotto A. La probabilità che un cliente lo acquisti è 0.2. Quanto occorre attendere affinchè si vendano 100 prodotti? (2 punti)

Problema 4
Un sistema può essere in tre stati, funzionante, parzialmente funzionante, guasto. Se il sistema è funzionante, allora passa a parzialmente funzionante con probabilità 0,4 a guasto con probabilità 0,2.
Se è parzialmente funzionante, passa a guasto con probabilità 0,4 o rimane parzialmente funzionante. Se il sistema è guasto, la riparazione lo restituisce parzialmente funzionante con probabilità 0,4, ancora guasto con probabilità 0,1, oppure perfettamente funzionante con la probabilità complementare.
1) Disegnare il diagramma degli stati del sistema (2 punti)
2) Scrivere la corrispondente matrice delle transizioni di Markov. (2 punti)
3) Calcolare la probabilità limite del sistema (3 punti)
4) Calcolare la matrice di transizione a 2 passi. (2 punti)
5) Calcolare M(2), ovvero la matrice dei passaggi condizionati agli stati. (1 punto)
6) Dato il vettore dei ricavi legati agli stati c=[100 50 -100] calcolate i costi condizionati in dipendenza dello stato di partenza del sistema (1 punto).
7) Dato il medesimo vettore dei costi e la probabilità limite, calcolare il costo atteso per periodo del sistema a regime [a lezione denotato con g] (1 punto).

Problema 1

Una variabile casuale X è distribuita second una distribuzione beta di parametri alfa=3 e beta=4 sull’intervallo [0,5].
Calcolare il suo valore medio e la sua varianza (4 punti)

alfa	3
beta	4
a	0
b	5
E[X]	2,142857
V[X]	0,765306

$$
\begin{cases}
E[x] = \dfrac{\alpha(b\text{-}a)}{\alpha+\beta} + a \\
V[x] = \dfrac{\alpha\beta(b\text{-}a)^2}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}
\end{cases}
$$

2,142857
0,765306
0,765306

Problema 2

Una variabile casuale è distribuita secondo una distribuzione gamma di parametri alfa e beta. Trovare i valori di alfa e beta tali che la varianza della variabile sia 100 e il valore atteso sia 10.

E[X]	10
V[X]	100

Dalle proprietà della distribuzione gamma si ha:

Alfa/beta=10; Alpha/beta^2=100.

10beta/beta^2=100

1/beta=10

Beta=1/10

Alpha=10*beta=10*1/10=1

Problema 3

Gli arrivi ad un supermercato si sugìsseguono ad un tasso lambda=150/ora.

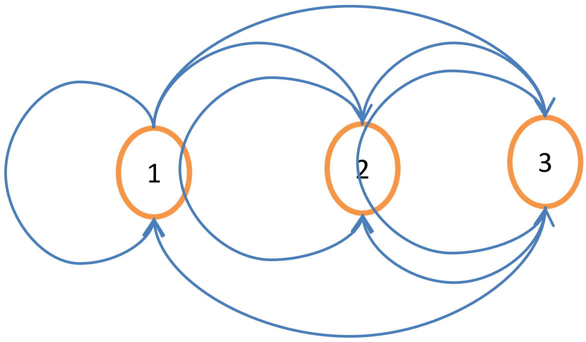
1) Quanto è il tempo medio di attesa tra un cliente e l'altro? Perchè? (2 punti)
2) Quanto occorre attendere per il 50mo cliente? Perchè? (2 punti)
3) Qual è la formula della probabilità che arrivino più di 1000 clienti in un giorno? (2 punti)
4) State guardando il prodotto A. La probabilità che un cliente lo acquisti è 0.2. Quanto occorre attendere affinchè si vendano 100 prodotti? (2 punti)

1): E[Xk]= 1/150 ora, perchè, dato un processo di Poisson, il tempo tra due arrivi (variabile denotata come Xk) è distribuito secondo una distribuzione esponenziale di tasso lambda.
2) Si chiede il tempo T50 che è distribuito secondo una distribuzione gamma di parametri n e lambda. Ne risulta quindi un valore atteso di T50 pari a n/lambda=50/150ora=1/3ora=20min.
3)

$$\boxed{P(N(8) > 1000) = \sum_{i=1001}^{\infty} \frac{e^{-8/150} \left({}^{8}\!/_{150} \right)^{150}}{(8/150)!}}$$

4) E[T100_A]=100/(150*,2)=3,3333 3,333333

1) Diagramma degli stati



2) Matrice di Markov

	0,4	0,4	0,2
P	0	0,4	0,6
	0,5	0,4	0,1

3) Probabilità limite

	0,4	0	0,5		1	0
PT	0,4	0,4	0,4	I	0	1
	0,2	0,6	0,1		0	0

	-0,6	0	0,5
PT-I	0,4	-0,6	0,4
	0,2	0,6	-0,9

Det(PT-I) 0,00

	-0,6	0	0,5	X1	
Matr Completa	0,4	-0,6	0,4	X2	=
	1	1	1	X3	

1,1

	-0,909090909	0,454545	0,272727
A-1	0	-1	0,4
	0,909090909	0,545455	0,327273

	0,27
Probabilità limite	0,40
	0,33

4) Matrice a 2 passi

	0,26	0,4	0,34
P^2	0,3	0,4	0,3
	0,25	0,4	0,35

5) M(2)

	P^0					
	1	0	0		0,40	0,40
M(2)=	0	1	0	+	0,00	0,40
	0	0	1		0,50	0,40

M(2)=	1,66	0,80	0,54
	0,30	1,80	0,90
	0,75	0,80	1,45

6) Costi condizionati

	100
c	50
	-100

costi condizionati	152
	30
	-30

7) Costi a regime

g	14,54545455

0
0
1

0
0
1

0,20		0,26	0,4	0,34
0,60	+	0,3	0,4	0,3
0,10		0,25	0,4	0,35