Probabilità Limite

giovedì 26 maggio 2011
14.23

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & & p_{2n} \\ \vdots & & & \\ p_{n1} & p_{n2} & & p_{nn} \end{bmatrix}$$

$$p_{ij} = P(X_k = j \mid X_{k-1} = i)$$

Matrice di Transizione

$$P^{(k)}$$

$$P^{(k)} = \text{matrice } k \text{ passi}$$

$$p_{ij}^{(k)} = P(X_k = j \mid X_0 = i)$$

$$P^{(k)} = P^k = \underbrace{P \cdot P \cdot P \cdots P}_{k \text{ volte}}$$

$p_{ij}^{(k)} = p(X_k = j \mid X_0 = i) =$ teorema probabilità totale $= \sum_{s=1}^{n} p(X_k = j \mid X_{k-1} = s, X_0 = i) \cdot p(X_{k-1} = s, X_0 = i) =$

$$s=1 \quad \cdot \; P(X_{k-1}=s, X_0=i) =$$

= x Markovianità :

$$P(X_k=j \mid X_{k-1}=s, X_0=i) =$$

$$P(X_k=j \mid X_0=i) = p_{ij}$$

$$\Rightarrow \sum_{s=1}^{n} p_{ij} \cdot P(X_{k-1}=s, X_0=i) =$$

$$P(X_k=j \mid X_0=i)$$

$$P(X_{k-1}=s \mid X_0=i) = p_{is}^{k-1}$$

$$\underline{a}^{(k)} = P^{(k)} \cdot \underline{a}^{(0)}$$

$\Downarrow$ stato iniziale

$$a_1 = P(X_k = 1)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.3000 & 0.3000 \\ 0.2000 & 0.3000 & 0.5000 \\ 0.3000 & 0.3000 & 0.4000 \end{bmatrix}$$

$$P^{(2)} = P \cdot P = \begin{bmatrix} 0.3700 & 0.3000 & 0.3300 \\ 0.3100 & 0.3000 & 0.3900 \\ 0.3300 & 0.3000 & 0.3700 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}^{(2)} = \left[P^{(2)}\right]^T \underline{a}^{(0)} = \underline{a}^{(0)T} \cdot P^{(2)}$$

$$\underline{a}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[1\ 0\ 0] \begin{bmatrix} 0.37 & 0.3 & 0.33 \\ 0.31 & 0.3 & 0.39 \\ 0.33 & 0.3 & 0.37 \end{bmatrix} =$$

$$\underline{a}^{(2)} = [0.37\ \ 0.3\ \ 0.33]$$

Sistema parte da $\underline{a}^{(0)'} = [0\ \ 0{,}5\ \ 0{,}5]$

$$\underline{a}^{(2)'} = [0\ \ 0{,}5\ \ 0{,}5] \begin{bmatrix} 0.37 & 0.3 & 0.33 \\ 0.31 & 0.3 & 0.39 \\ 0.33 & 0.3 & 0.37 \end{bmatrix} =$$

$$= [0.32\ \ 0.3\ \ 0.38]$$

$$\underline{a}^{(20)'} = [0\ \ 0.5\ \ 0.5]\, P^{(20)} = [0.33\ \ 0.3\ \ 0.36\ 25$$

$$= [0.3375\ \ 0.30\ \ 0.3625]$$

Indipendentemente da dove partiamo giungiamo alla distribuzione

X_n è la variabile di stato del sistema

$$a_i^{(n)} = P(X_n = i)$$

$$\underline{a}^{(n)} = [a_1^{(n)}\ a_2^{(n)} \ldots a_{50}^{(n)}]$$

distribuzione di $\bar{X}_n$ = con quale probabilità aspetto di trovare il sistema in un determinato stato al tempo n.

$$\lim_{t \to \infty} \underline{a}^{(t)} = \underline{\tilde{\pi}}$$

$\underline{\tilde{\pi}}$ = distribuzione limite

Nel nostro esempio che valore darete a $\underline{\tilde{\pi}}$?

$$\underline{\tilde{\pi}} = [0.3375 \quad 0.3 \quad 0.3625]$$

$\underline{\tilde{\pi}}$ è la distribuzione a cui $\underline{a}^{(K)}$ tende allo scorrere di K.

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \pi_i$$

$$\underline{\tilde{\pi}} = P \underline{\tilde{\pi}}$$

$$\underline{\tilde{\pi}} - P \underline{\tilde{\pi}} = \underline{0}$$

$$\underline{\tilde{\pi}} [I - P] = \underline{0}$$

Fin qui $\underline{\tilde{\pi}}$ vettore orizzontale

$([ ])^T \quad T$

$$\left(\underline{\pi}\,[\underline{I}-P]\right) = \underline{0}$$

$$(-1)\left[\underline{I}-P\right]^T \cdot \underline{\pi}^T = \underline{0}^T (-1)$$

$$(P^T - \underline{I})\,\underline{\pi} = \underline{0}$$

$\underline{\pi}$ adesso è vettore verticale

Sistema lineare omogeneo

$$A\,\underline{x} = \underline{0}$$

Quante soluz ha sistema omogeneo?
Per non avere l'unica soluz $\underline{\pi}^* = 0$
occorre che $\det(P^T - I) = 0$.
Quindi ho ∞ soluz. Dalla padella alle brace? No, occorre imporre

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$$

$$\underline{\pi} \cdot \underline{1} = 1$$

Dato il sistema di Markov caratterizzato dalla matrice

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

0.5000	0.3000	0.3000
0.2000	0.3000	0.5000
0.3000	0.3000	0.4000

trovate la probabilità limite del sistema

$$P^T \quad [0.5\ 0.2\ 0.3]$$

$$P^T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$P^T - \underline{I} = P^T - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & -0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & -0.6 \end{bmatrix}$$

$$\left(P^T - \underline{I}\right) \underline{x} = \underline{0}$$

Poichè $|P^T - \underline{I}| = 0$, ∞ soluzioni.

Imporre $\sum_i \pi_i = \underline{1}$

Sostituire 1 riga del sistema con equazione

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $P^T - \underline{I}$ ha rango $n - 1$ (n stati)

Quindi tolgo 1 delle righe e sostituisco con

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 = \underline{1}$$

$\det(P^T - \underline{I}) = 0$ implica Rango$(P^T - \underline{I}) < n$

$\det(P^T - I) = 0$ implica $\text{Rango}(P^T - I) < n$

Quindi le righe sono linearmente dipendenti

$$P^T - I = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & -0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & -0.6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -0.5 & 0.2 & 0.3 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0.2 & 0.5 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\pi}_1 \\ \overline{\pi}_2 \\ \overline{\pi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se sostituiamo 1^a riga

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.3 & -0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\pi}_1 \\ \overline{\pi}_2 \\ \overline{\pi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -0.7 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & -0.6 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.3 & -0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & -0.6 \end{bmatrix}} = \frac{1 \cdot (-0.7)(-0.6) - 0.3 \, 0.5}{0.8}$$

$$= 0.3375$$

$$X_2 = \frac{\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.3 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & -0.6 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.3 & -0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & -0.6 \end{bmatrix}} = \frac{0.3\cdot 0.2 - 0.6\times 0.3}{0.8}$$

$$X_3 = 1 - x_1 - x_2$$

Esercizio

Data $P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.9 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$ trovate $\underline{\pi}$.

$$P^T = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.9 & 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$P^T - I = \begin{bmatrix} -0.9 & 0 & 0.2 \\ 0 & -0.8 & 0.2 \\ 0.9 & 0.8 & -0.4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.9 & 0 & 0.2 \\ 0 & -0.8 & 0.2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\pi_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & -0.8 & 0.2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} -0.9 & 0 & 0.2 \\ 0 & -0.8 & 0.2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{-(-0.8)\, 0.2 \cdot 1}{(-0.9)(-0.8) - (-0.9)(0.2) - (0.2)(-0.8)}$$

$$= \frac{0.16}{0.72 + 0.18 + 0.16} = \frac{0.16}{\cancel{0}1.06} = 0.15094$$

$$\pi_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} -0.9 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{1.06} = \frac{0.9 \times 0.2}{1.06} = \frac{0.18}{1.06} = 0.1698$$

$$\pi_3 = 1 - 0.15094 - 0.1698 = 0.679$$

Th. Cramer

$$A \underline{x} = \underline{b}$$

Soluz. se $\det(A) \neq 0$

$x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)}$ dove B_i è la matrice ottenuta sostituendo alla i-esima colonna il termine noto i-esima colonna il termine noto

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & b_2 & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$M = [m_{ij}]$$

i = stato partenza

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{tempo}}}{M(K)} = [m_{ij}(K)]$$

j = stato di arrivo

$m_{ij}(K)$:= numero di volte che mi aspetto che il sistema passi dallo stato j dato che parte dallo stato i

$m_{ij}(K)$ = condizionato allo stato di partenza.

Si dimostra che $M(K) = P^0 + P^1 + P^2 + \dots + P^K$

$$= \sum_{s=0}^{K} P^s$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 & 0.05 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = 2 \quad M(2) = P^0 + P^1 + P^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & P & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 & 0.05 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 & 0.05 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 \cdot 0.9 + 0.4 \cdot 0.05 & 0.9 \cdot 0.05 + 0.05 \cdot 0.5 & 0.9 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 0.05 + 0.05 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

MATR. PRODOTTO (A; A); selezionare 3x3

F2; ctrl+shift +enter.

$$M(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 & 0.05 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.83 & 0.07 & 0.1 \\ 0.56 & 0.27 & 0.17 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.73 & 0.12 & 0.15 \\ 0.96 & 1.77 & 0.27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

La somma delle righe di $M(K)$ è uguale al tempo totale ($K+1$; $+1$ x' c'è lo zero)

Se tutte le volte che passo stato 1 ho un punteggio di 200, dello stato 2 di 100 dello stato 3 di -50; qual è il punteggio atteso a $K=2$ se parto d stato 1?

m_{1J} = 1ª riga di M

$$2.73 \quad \overbrace{0.12 \quad 0.15}$$ se parto da 1 "passo" in 1 2.73 volte.

$$2.73 \times 200 + 0.12 \times 100 + 0.15(-50) = 550.5$$

Se parto stato 2?

$$0.96 \cdot 200 + 1.77 \cdot 100 + 0.27(-50) = 355.5$$

Se parto stato 3?

$$0 \cdot 200 + 0 \cdot 100 + 3 \cdot (-50) = -150$$

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \\ -50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2.73 & 0.12 & 0.15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}(K) = M(K) \cdot \underline{c} = \begin{bmatrix} 0.96 & 1.77 & 0.27 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ -50 \end{bmatrix}$$

Esercizio

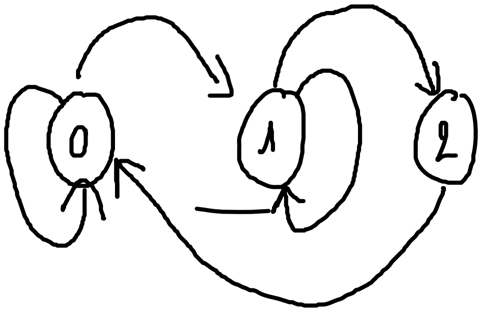
Un sistema è caratterizzato da 3 stati. Se è nello stato 0 passa allo stato 1 con probabilità 0.5 o rimane nello stato 0. ~~ALT~~ Se è nello stato 1 passa allo stato 2 con probabilità 0.5, altrimenti rimane nello stato 1.

Se è nello stato 2 passa nello stato 0 con $p = 0.5$ altrimenti rimane stato 2.

I costi (ricavi) associati stati sono: $\underline{c} = \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \\ -100 \end{bmatrix}$.

1) Disegnate diagramma stato del sistema
2) Scrivete matr markov
3) Calcolate la probabilità limite $\underline{\pi}$
4) Calcolate $M(2)$ e i costi condizionali $K=2$
5) Calcolate il costo atteso del sistema per

periodo $\left(g = \underline{\Pi} \cdot \underline{e} \right)$.



$$
\begin{array}{c|ccc}
 & p_{0,0} & p_{0,1} & p_{0,2} \\
 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\
1 & 0 & 0.5 & 0.5 \\
2 & 0.5 & 0 & 0.5 \\
 & & & p_{2,2}
\end{array}
$$

$$P^T = \; ; \quad P^T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$P' - I = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\pi_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0.5 \times 0.5 \times 1}{0.5 \cdot 0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 0.5} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1/3$$

$$\pi_2 = \frac{\begin{vmatrix} -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{0.75} = \frac{0.5 \cdot 0.5}{0.75} = 1/3$$

$$\pi_3 = 1/3 \quad \left(\pi_3 = 1 - \pi_1 - \pi_2 = 1 - 1/3 - 1/3 = 1/3\right)$$

$$\pi = \left(1/3, 1/3, 1/3\right)$$

4) $$M(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}^2$$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$M(2) = \begin{bmatrix} 1 + 0.5 + 0.25 & 0 + 0.5 + 0.5 & 0 + 0 + 0.25 \\ 0 + 0 + 0.25 & 1 + 0.5 + 0.25 & 0 + 0.5 + 0.5 \\ 0 + 0.5 + 0.5 & 0 + 0 + 0.25 & 1 + 0.5 + 0.25 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1.75 & 1 & 0.25 \\ 0.25 & 1.75 & 1 \\ 1 & 0.25 & 1.75 \end{bmatrix}$$

$$\underline{C}(K) = M(2) \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \\ -100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.75 \times 200 + 1 \times 100 + 0.25(-100) \\ 0.25(200) + 1.75(100) - 100 \\ 200 + 0.25 \times 100 - 1.75 \cdot 100 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 425 \\ 125 \\ 50 \end{bmatrix}$$

5) $g = \underline{\pi} \cdot \underline{c} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \\ -100 \end{bmatrix} = 200/3 = 66.67$

Una variabile aleatoria X è distribuita secondo una distribuz Beta di parametri $r = 5$ $q = 7$ sull'intervallo $[a,b] = [-50, 70]$.

Calcolate: 1) $E[X]$

2) Varianza $[X]$

$$E[X] = 5 \cdot \frac{70 - (-50)}{(5+7)} + (-50) = \frac{5 \cdot 120}{12} - 50 = 0$$

$$\begin{cases} E[x] = \dfrac{\alpha(b-a)}{\alpha+\beta} + a \\ V[x] = \dfrac{\alpha\beta(b-a)^2}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \end{cases}$$

$$V[X] = 5 \cdot 7 \, (120)^2 \quad - \quad 5 \cdot 7 \cdot 120^2 = 269.2$$

$$\frac{\quad}{(12)^2(5+7+1)} = \frac{\quad}{12^2 \cdot 13}$$

Una variabile aleatoria Y è distribuita secondo una distribuzione gamma di parametri 30, 10.

Calcolare $E[Y]$ e $V[Y]$.

$$E[Y] = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{30}{10} = 3 \; ; \; V[Y] = \frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{30}{100} = 3/10$$

Gli arrivi ad un supermercato seguono legge di Poisson. Tasso $\lambda = 100/h$. Ogni cliente compera il bene X con probabilità $p_X = 0.1$.

1) $P(N(3h) = 175)$. N = arrivi M

2) $P(M(3h) = 85)$

3) Quanti clienti mi aspetto che arrivino in 1 giorno?

4) " acquisti prodotto X " " ?

$$P(N(\ldots) \ldots) \quad (\lambda t)^k e^{-\lambda t} \quad (100 \cdot 3)^{175} e^{-100 \cdot 3}$$

$$P(N(t)=k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} = \frac{(100\cdot 3)^{175} e^{-100\cdot 3}}{175!}$$

$$P(M(3)=85) = \frac{(\lambda_x t)^{85} e^{-\lambda_x t}}{85!} = \frac{(\overbrace{100\cdot 0{,}1}^{\lambda_x}\cdot 3)^{85} e^{-\overset{\lambda_x}{10}\cdot 3}}{85!}$$

$$P(M(3)\leq 85) = \sum_{m=0}^{85} \frac{(\lambda_x \cdot 3)^m}{m!} e^{-\lambda_x \cdot t} =$$

$$= \sum_{m=0}^{85} \frac{(30)^m}{m!} e^{-30}$$

$$P(M(3)>85) = 1 - P(M(3)\leq 85) = 1 -$$

$$E[N(t)] = \lambda \cdot t \quad (\text{x' processo Poisson})$$

$$= 100 \cdot 8 = 800$$

$$E[M(t)] = \lambda_x \cdot t = 100 \cdot 0.1 \cdot 8 = 80$$

5) Quanto tempo intercorre tra 1 arrivo e l'altro

Quanto " " " 1 acquisto e l'altro?

$$E[X_K] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{100} h = 0.01 h$$

$$E[X_K^M] = \frac{1}{\lambda_x} = \frac{1}{100 \cdot 0.1} = 0.1 h$$

6) Quanto tempo occore x T

$$\boxed{E[T_{50}] = \frac{1}{2} h} \quad T_{50} \sim \Gamma(50, 100)$$

$$E[T_{50}^M] = \qquad E = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} h$$

$$\rightarrow T_{50}^M \sim \Gamma(50, 10) \quad E[T_{50}^M] = \frac{50}{10} = 5h$$

7) Se il prodotto X ha un costo di 100'000 EUR/anno

Qual è il minimo prezzo di vendita considerando 300g apertura anno?

$$E[M(1 anno)] = \lambda_x \cdot 8 \cdot 300 = 10 \cdot 8 \cdot 300 = 24'000$$

$$24'000 x \geq 100'000$$

$$x \geq \frac{100'000}{24'000} = 4.16$$

8) Un'assicuratore assicura sciatori con infortuni con tasso 10/g. I costi infortuni seguono distribuzione normale $N(1000\,EUR, 1000\,EUR)$. Quanto deve incassare di premi all'anno x non essere in passivo? (anno: 300g)

$$E[X] = 1000$$

$$E[S] = \lambda \cdot t \cdot E[X] = 300g \cdot 10/g \cdot 1000 =$$

$$= 3\,MEUR$$