Probabilità Limite

giovedì 26 maggio 2011
14.23

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & & p_{2n} \\ \vdots & & & \\ p_{n1} & p_{n2} & & p_{nn} \end{bmatrix}$$

$$p_{ij} = P(X_k = j \mid X_{k-1} = i)$$

Matrice di Transizione

$$P^{(K)}$$

$$P^{(K)} = \text{matrice } K \text{ passi}$$

$$p_{ij}^{(K)} = P(X_k = j \mid X_0 = i)$$

$$P^{(K)} = P^K = \underbrace{P \cdot P \cdot P \cdots P}_{K \text{ volte}}$$

$$p_{ij}^{(K)} = p(X_k = j \mid X_0 = i) = \text{teorema probabilità totale} = \sum^{n} p(X_k = j \mid X_{k-1} = s, X_0 = i)$$

$$s=1 \quad \cdot \; P(X_{k-1}=s, X_0=i) =$$

$= \times$ Markovianità:

$$P(X_k=j \mid X_{k-1}=s, X_0=i) =$$

$$P(X_k=j \mid X_0=i) = p_{ij}$$

$$\Rightarrow \sum_{s=1}^{n} p_{ij} \cdot P(X_{k-1}=s, X_0=i) =$$

$$P(X_k=j \mid X_0=i)$$

$$P(X_{k-1}=s \mid X_0=i) = p_{is}^{k-1}$$

$$\underline{a}^{(k)} = P^{(k)} \cdot \underline{a}^{(0)}$$

$\Downarrow$ stato inziale

$$a_1 = P(X_k = 1)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.3000 & 0.3000 \\ 0.2000 & 0.3000 & 0.5000 \\ 0.3000 & 0.3000 & 0.4000 \end{bmatrix}$$

$$P^{(2)} = P \cdot P = \begin{bmatrix} 0.3700 & 0.3000 & 0.3300 \\ 0.3100 & 0.3000 & 0.3900 \\ 0.3300 & 0.3000 & 0.3700 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}^{(2)} = \left[P^{(2)}\right]^T \underline{a}^{(0)} = \underline{a}^{(0)T} \cdot P^{(2)}$$

$$\underline{a}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.37 & 0.3 & 0.33 \\ 0.31 & 0.3 & 0.39 \\ 0.33 & 0.3 & 0.37 \end{bmatrix} =$$

$$\underline{a}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.37 & 0.3 & 0.33 \end{bmatrix}$$

. Sistema parte da $\underline{a}^{(0)'} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$

$$\underline{a}^{(2)'} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.37 & 0.3 & 0.33 \\ 0.31 & 0.3 & 0.39 \\ 0.33 & 0.3 & 0.37 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.32 & 0.3 & 0.38 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}^{(20)'} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} P^{(20)} = \begin{bmatrix} 0.33 & 0.3 & 0.36\,25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.3375 & 0.30 & 0.3625 \end{bmatrix}$$

Indipendentemente da dove partiamo giungiamo alla distribuzione

X_n è la variabile di stato del sistema

$a_i^{(n)} = P(X_n = i)$

$$\underbrace{\underline{a}^{(n)} = \left[a_1^{(n)} \ a_2^{(n)} \ \dots \ a_{50}^{(n)}\right]}$$

distribuzione di X_n = con quale probabilità aspetto di trovare il sistema in un determinato stato al tempo n.

$$\lim_{t \to \infty} \underline{a}^{(t)} = \underline{\tilde{\pi}}$$

$\underline{\tilde{\pi}}$ = distribuzione limite

Nel nostro esempio che valore dareste a $\underline{\tilde{\pi}}$?

$$\underline{\tilde{\pi}} = [0.3375 \quad 0.3 \quad 0.3625]$$

$\underline{\tilde{\pi}}$ è la distribuzione a cui $\underline{a}^{(K)}$ tende allo scorrere di K.

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \pi_i$$

$$\underline{\tilde{\pi}} = P \underline{\tilde{\pi}}$$

$$\underline{\tilde{\pi}} - P \underline{\tilde{\pi}} = \underline{0}$$

$$\underline{\pi}\,[I - P] = \underline{0}$$

Fin qui $\underline{\pi}$ vettore orizzontale

$$\left(\underline{\pi}\,[I - P]\right)^T = \underline{0}^T$$

$$(-1)\,[I - P]^T \cdot \underline{\pi}^T = \underline{0}^T\,(-1)$$

$$(P^T - I)\,\underline{\pi} = \underline{0}$$

$\underline{\pi}$ adesso è vettore verticale

Sistema lineare omogeneo

$$A\,\underline{x} = \underline{0}$$

Quante soluz ha sistema omogeneo?

Per non avere l'unica soluz $\underline{\pi}^* = 0$

occorre che $\det(P^T - I) = 0$.

Quindi ho ∞ soluz. Dalla padella alle brace? No, occorre imporre

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$$

$$\underline{\pi} \cdot \underline{1} = 1$$

Dato il sistema di Markov caratterizzato dalla

Dato il sistema di Markov caratterizzato dalla matrice $P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$

0.5000 0.3000 0.3000
0.2000 0.3000 0.5000
0.3000 0.3000 0.4000

trovate la probabilità limite del sistema

$$P^T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$P^T - \underline{I} = P^T - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & -0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & -0.6 \end{bmatrix}$$

$$\left(P^T - \underline{I}\right)\underline{x} = \underline{0}$$

Poiché $|P^T - \underline{I}| = 0$, ∞ soluzioni.

Imporre $\sum_i \pi_i = \underline{1}$

Sostituire 1 riga del sistema con equazione

$1 \quad 1 = 1 \quad 1$

$$1 \quad 1 \quad 1 \qquad\qquad 1$$

La matrice $P^T - I$ ha rango $n-1$ (n stati)

Quindi tolgo 1 delle righe e sostituisco con

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 = \underline{1}$$

$\det(P^T - I) = 0$ implica Rango$(P^T - I) < n$

Quindi le righe sono linearmente dipendenti

$$P^T - I = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & -0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & -0.6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -0.5 & 0.2 & 0.3 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0.2 & 0.5 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\pi}_1 \\ \bar{\pi}_2 \\ \bar{\pi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se sostituiamo 1^a riga

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.3 & -0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\pi}_1 \\ \bar{\pi}_2 \\ \bar{\pi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \frac{\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -0.7 & 0.3 \\ 0 & -0.5 & -0.6 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.3 & -0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & -0.6 \end{bmatrix}} = \frac{1\cdot(-0.7)(-0.6) - 0.3\cdot 0.5}{0.8}$$

$$= 0.3375$$

$$X_2 = \frac{\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.3 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & -0.6 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.3 & -0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & -0.6 \end{bmatrix}} = \frac{0.3\cdot 0.2 - 0.6\times 0.3}{0.8}$$

$$X_3 = 1 - x_1 - x_2$$

Esercizio

Data $P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.9 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$ trovate $\underline{\pi}$.

$$P^T = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.9 & 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$P^T - I = \begin{bmatrix} -0.9 & 0 & 0.2 \\ 0 & -0.8 & 0.2 \\ 0.9 & 0.8 & -0.4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.9 & 0 & 0.2 \\ 0 & -0.8 & 0.2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\pi_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & -0.8 & 0.2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} -0.9 & 0 & 0.2 \\ 0 & -0.8 & 0.2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{-(-0.8)\, 0.2 \cdot 1}{(-0.9)(-0.8) - (-0.9)(0.2) - (0.2)(-0.8)}$$

$$= \frac{0.16}{0.72 + 0.18 + 0.16} = \frac{0.16}{\cancel{0}\,1.06} = 0.15094$$

$$\pi_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} -0.9 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{1.06} = \frac{0.9 \times 0.2}{1.06} = \frac{0.18}{1.06} = 0.1698$$

$$\pi_3 = 1 - 0.15094 - 0.1698 = 0.679$$

Th. Cramer

Th. Cramer

$$A \underline{x} = \underline{b}$$

Soluz. se $\det(A) \neq 0$

$$x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)}$$ dove B_i è la matrice ottenuta sostituendo alla i-esima colonna il termine noto

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & b_2 & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$