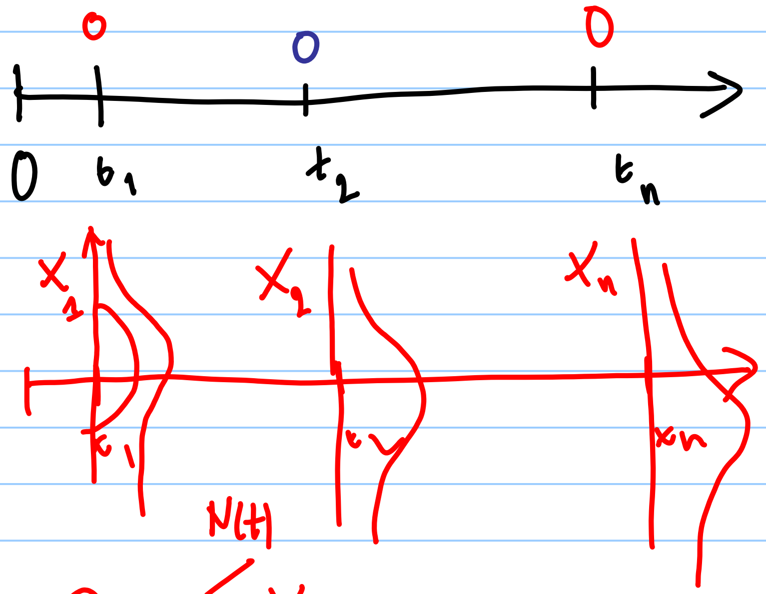
Titolo nota 19/05/2011



$$C = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

$$S(t) = S_0 + \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

$S_0 = 0$ x conservatism
x sicurezza

$$E[S(t)] = E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right] = \lambda \cdot t \cdot E[X]$$

$N(t)$ Poisson λ

Costo atteso = Ricavo atteso

$C_0 =$ costo x unità tempo

$$\lambda \cdot \cancel{t} \cdot E[X] = c_0 \cdot \cancel{t}$$

$$c_0 = \lambda \, E[X]$$

Esempio

Incidenti Poisson $\lambda = 10/g$

$X \sim \text{Beta}\,[50\,EUR - 15'000\,EUR]$

$r = q = 2$

$t = 6$ mesi.

Incasso totale x 6 mesi.

$$E[\text{costo}] = \lambda \cdot t \cdot \underbrace{E[X]}_{\text{costo medio incidente}}$$

$X \sim \text{Beta}(2,2;\ 50 - 15'000)$

$$E[X] = (p.\,29) = \frac{2\,(15'000 - 50)}{2+2} + 50 =$$

$= 7525\ EUR$

$$E[\text{costo}] = 10/g \cdot 180\,g \cdot 7525\ EUR =$$

$= 13'545'000\ EUR.$

Se uso valore atteso sono neutrale al rischio

MARKOV

X_n

n = tempo

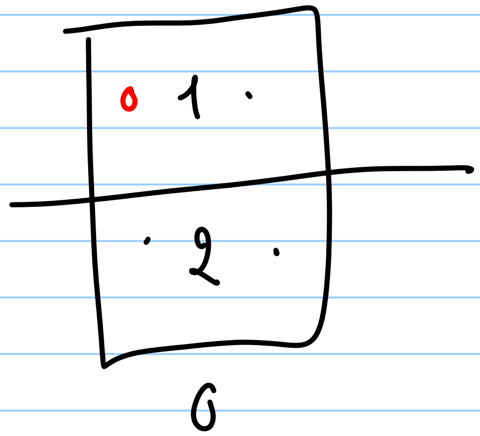
X_n è variabile casuale che ci dice stato sistema tempo n.

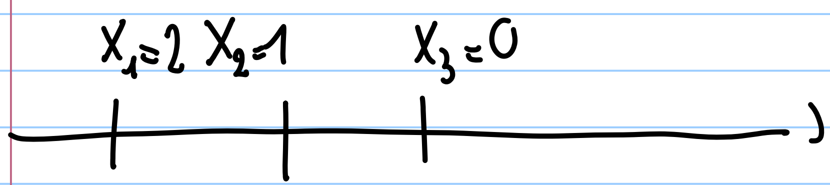
stato	macchine
1	7
2	6
3	5
4	4
5	3

$X_{12} = 3$?

X_{12} = alla 12^{ma} settimana il sistema è nello stato 3 = 5 macchine.

Es.





$$X_k = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$$

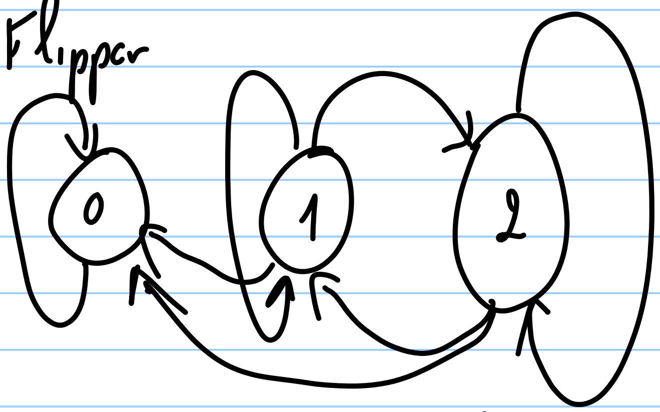
X_K = variabile casuale

? Markov ?

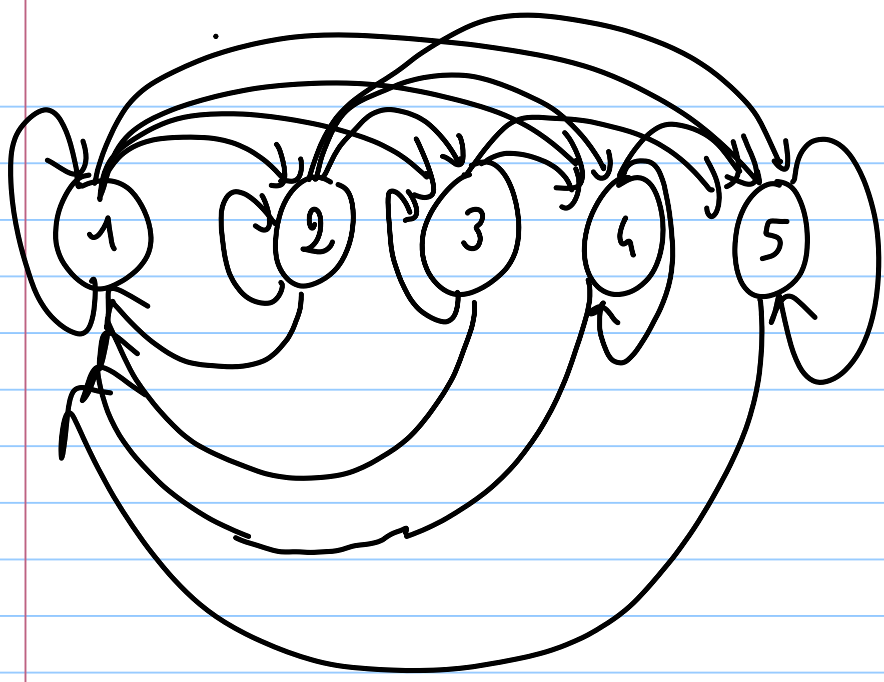
Ipotesi Markoviana: la probabilità che sistema passi in un determinato stato al tempo $K+1$ dipende solo dallo stato al tempo K e non da come ci è arrivato.

Diagramma degli stati

Flipper



Magazzino auto di lusso



Probabilità di transizione

$$P(X_{k+1} = j \mid X_k = i, X_{k-1} = i_{k-1}, X_{k-2} = i_{k-2} \ldots)$$

prob. che il sistema sia nello stato j al tempo $k+1$ dato che il sistema al tempo k era nello stato i, al tempo $k-1$ nello stato i_{k-1} ....

Se invoco proprietà di Markov

$$P(X_{k+1} = j \mid X_k = i) = P_{ij}(k)$$

$X_{k+1} = j$ → stato sistema $k+1$

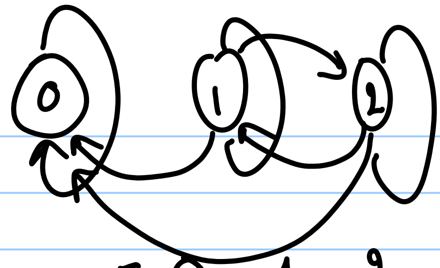
$X_k = i$ → stato sistema tempo k

$P_{ij}(k)$

k → tempo

i → stato tempo k

j → stato tempo $k+1$



$$\begin{array}{c|c} i \backslash j & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_{10}(k) & p_{11}(k) & p_{12}(k) \\ p_{20}(k) & p_{21}(k) & p_{22}(k) \end{bmatrix} \end{array}$$

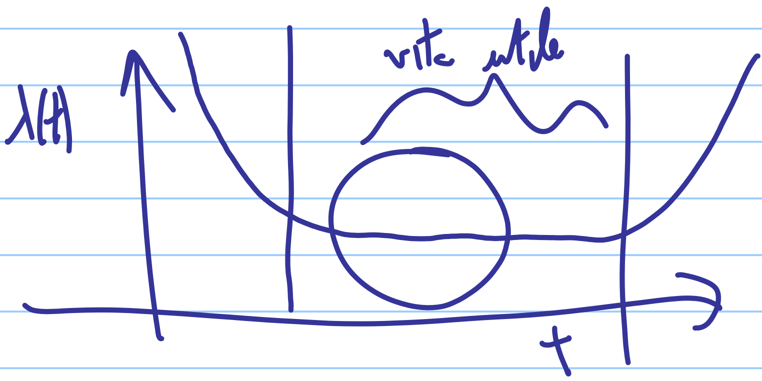
$$\sum_{j=0}^{2} p_{ij}^{(k)} = 1 \qquad p_{ij}(k) \geq 0 \quad \forall k$$

Matrice Markov: somma righe = 1

elementi compresi tra zero e 1

Omogenei

$$p_{ij}(k) = p_{ij}$$



Nella vita utile omogeneità è ragionevole

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & & p_{1n} \\ \vdots & & & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Markov omogeneo P non dipende da k

P x auto di lusso

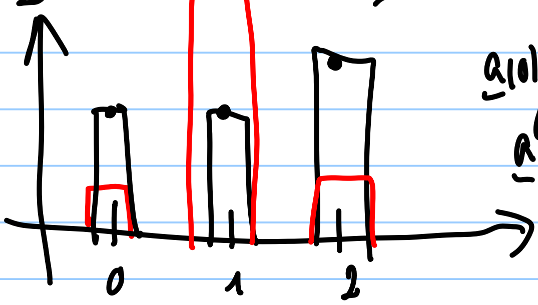
$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} &
\begin{bmatrix}
p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} \\
p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} \\
p_{31} & 0 & p_{33} & p_{34} & p_{35} \\
p_{41} & 0 & 0 & p_{44} & p_{45} \\
p_{51} & 0 & 0 & 0 & p_{55}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$a(k)$

$p^{(k)}$

$a_i = \underbrace{P(X_0 = i)}$ probabilità che sistema parta stato i

$$
\begin{array}{c c}
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \underline{a} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
P(X_0 = 0) = 0.3 \\
P(X_0 = 1) = 0.3 \\
P(X_0 = 2) = 0.4
\end{array}
$$



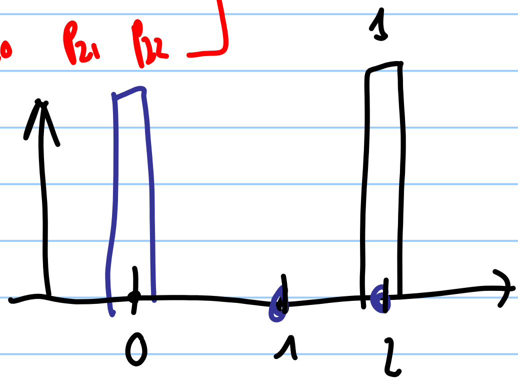
$\underline{a}(0) \longrightarrow \underline{a}^{(k)}$

$\underline{a}^{(k)} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.8 \\ 0.1 \end{bmatrix}$

$\underline{a}$ = distribuzione iniziale del sistema

Flippon $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$

$\underline{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$



$\underline{a}^{(\infty)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Probabilità di trovare sistema in 1 det. stato cambia con il tempo $\Leftrightarrow$ Distribuzione del sistema cambia con il tempo.

$$a_j^{(k)} = P(X_k = j)$$

$$p_{ij}^{(k)} = P(X_k = j \mid X_{k-1} = i)$$

$$P^0 = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ n & & & & \cdot & & 1 \end{array} = I$$

$P^{(0)} =$ identità.

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{1n} \\ & & \end{bmatrix} = P$$

$P^{(0)} = I$; $P^{(1)} = P$; $P^{(2)}$

$$P(k) = \begin{bmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) & \cdot \\ & & \end{bmatrix}$$

se uso questa mat. non omog.

$P^{(k)}$

$\downarrow$ proc. omogeneo

matrice transizione a K passi

$$P^{(k)} = \begin{bmatrix} p_{11}^{(k)} & p_{12}^{(k)} & \dots & p_{1n}^{(k)} \\ p_{21}^{(k)} & p_{22}^{(k)} & & p_{2n}^{(k)} \\ - & - & - & \end{bmatrix}$$

$$p_{ij}^{(k)} = P(X_k = j \mid X_0 = i)$$

p_{ij}

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & [P] & & P & & P & & & & & & P & \\ | & & | & & | & & | & \dots & - & | & & & | \\ 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & & & & & K \end{array}$$

come collegate $p_{ij}^{(k)}$ con p_{ij}?

$$P \to P^{(k)}$$