INGEGNERIA GESTIONALE

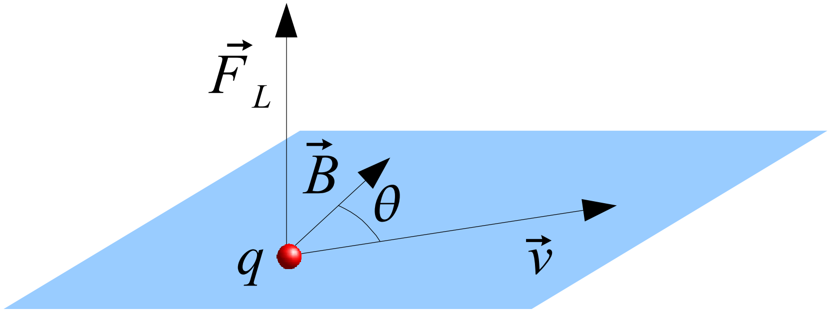
corso di Fisica Generale

Prof. E. Puddu

Interazioni di tipo magnetico II

Forza magnetica su una carica in moto

Una particella di carica *q* in moto risente di una forza magnetica chiamata forza di Lorentz. Questa forza, facendo riferimento al sistema di figura, ha modulo

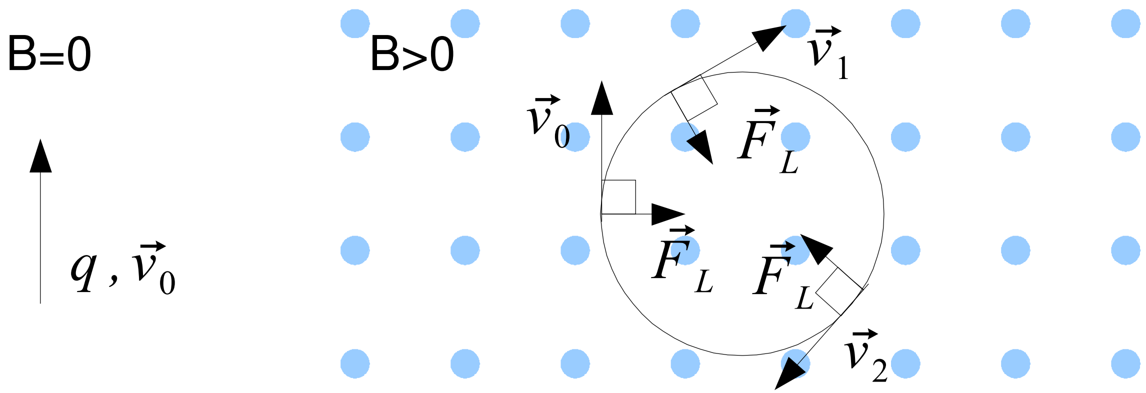


$$F_L = qvB\sin\theta$$

Questa forza ha direzione perpendicolare al piano formato da *v* e *B*. Il verso è invece determinato dall'angolo che va da *v* a *B*. Per questa ragione viene indicata con il prodotto vettoriale

$$\vec{F}_L = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Questa forza, essendo perpendicolare alla velocità, ne modifica solo la direzione ma non il modulo. Il risultato è che la particella si muove di moto rettilineo e uniforme.
Supponiamo una particella che si stia muovendo di moto rettilineo e uniforme quando improvvisamente viene acceso un campo magnetico B perpendicolare (per comodità) al moto della particella. La particella a causa della forza di Lorentz devia la sua traiettoria. Fintantoché si trova all'interno del campo magnetico, esiste sempre una forza perpendicolare alla sua velocità. Questo da origine ad un moto circolare e uniforme.



Forza magnetica su una carica in moto

Calcoliamo ora il raggio dell'orbita descritto dalla particella, eguagliando forza centripeta e forza di Lorentz

$$\frac{mv^2}{r} = qvB$$

da cui

$$r = \frac{mv}{qB}$$

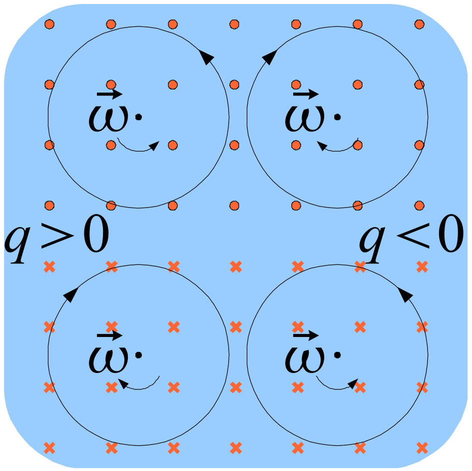
La velocità iniziale della particella è la velocità tangenziale del moto circolare e uniforme, di cui possiamo calcolare la velocità angolare ω

$$q\vec{v} \wedge \vec{B} = m\vec{a} = m\vec{\omega} \wedge \vec{r} = -m\vec{v} \wedge \vec{\omega}$$

semplificando per la velocità al primo e all'ultimo membro otteniamo

$$\vec{\omega} = -\frac{q}{m}\vec{B}$$

questa espressione ci dice che la velocità angolare è antiparallela al campo magnetico per cariche positive e parallela al campo magnetico per cariche negative. La regola della vite destrorsa da il senso di rotazione a partire dalla velocità angolare...



Ha senso, in questo moto, calcolare anche il periodo e la frequenza di rotazione

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}$$

LIUC

Moto generico di una particella carica in un campo magnetico

Supponiamo ora che una particella entri in un campo magnetico B ad un angolo θ qualsiasi. La sua velocità *v* può essere scomposta vettorialmente in un termine parallelo ed uno perpendicolare al campo magnetico

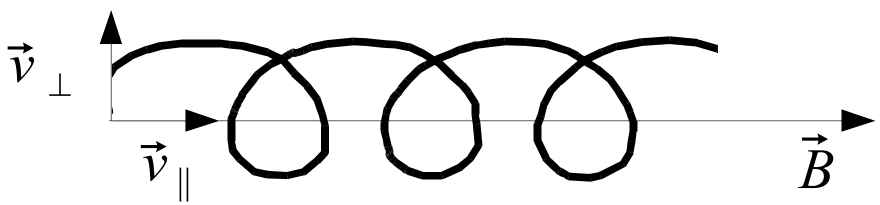
$$\vec{v} = \vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel}$$

di modo che il calcolo della forza di Lorentz dia

$$\vec{F}_L = q\,\vec{v} \wedge \vec{B} = q(\vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel}) \wedge \vec{B} = q\,\vec{v}_{\perp} \wedge \vec{B} + \vec{v}_{\parallel} \wedge \vec{B} = q\,\vec{v}_{\perp} \wedge \vec{B} + 0 = q\,\vec{v}_{\perp} \wedge \vec{B}$$

questo significa che lungo la direzione della velocità parallela al campo, la particella non risente alcuna forza; questo equivale a dire che questa componente di velocità non viene accelerata. Al contrario, la velocità perpendicolare subisce la forza di Lorentz con le modalità viste nelle slide precedenti.

Quindi il moto di una particella in presenza di campo magnetico è la composizione di un moto traslatorio lungo la direzione del campo e di un moto rotatorio su un piano perpendicolare al campo: il risultato è un moto elicoidale.



Forza magnetica su un conduttore percorso da corrente

Un conduttore percorso da corrente è un mezzo in cui i portatori di carica si muovono alla velocità *v* di deriva. Ognuno di questi portatori di carica risentirà della stessa forza di Lorentz. Poiché i portatori di carica sono legati molto fortemente al conduttore essi trascinano con se il conduttore nel loro moto. Quel che ne risulta è che un conduttore percorso da corrente risente di una forza perpendicolare al verso della corrente stessa e al campo magnetico che la genera. Ricaviamo innanzitutto l'espressione per tale forza. La forza di cui risente ogni portatore di carica è

$$\vec{F}=q\,\vec{v}\wedge\vec{B}$$

In un tratto di lunghezza *dl* e sezione *S* contiene *N* elettroni, ovvero *n=N/V* elettroni per unità di volume. La forza totale che agisce sul tratto infinitesimo di conduttore quindi è

$$d\,\vec{F}=N\,q\,\vec{v}\wedge\vec{B}=nV\,q\,\vec{v}\wedge\vec{B}=(S\,dl)\,n\,q\,\vec{v}\wedge\vec{B}=(S\,dl)\,\vec{j}\wedge\vec{B}$$

dove *j* è la densità di corrente. Considerato che *I=Sj*, definiamo il vettore ***dl*** come il vettore avente modulo *dl* e verso di ***j***. A questo punto la forza esercitata sull'elemento di conduttore diventa

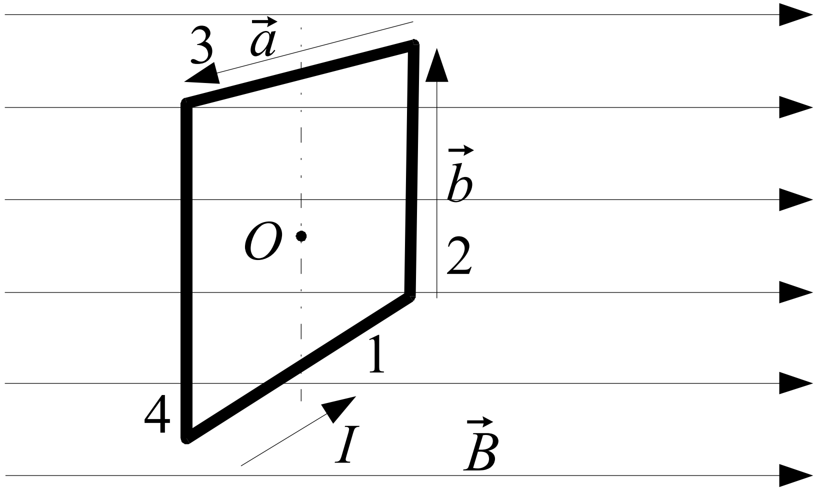
$$d\,\vec{F}=i\,\vec{dl}\wedge\vec{B}$$

Che integrata su tutta la lunghezza L del conduttore da

$$\vec{F}=i\,\vec{L}\wedge\vec{B}$$

Forza magnetica su una spira rettangolare percorsa da corrente

Supponiamo di avere una spira rettangolare percorsa da una corrente I. Su ogni lato della spira agirà la forza magnetica.



Supponiamo di avere una spira rettangolare percorsa da una corrente I. Su ogni lato della spira agirà la forza magnetica. F_1, la forza agente sul lato 1, è rivolta verso il basso, come si nota dalla legge della mano destra. F_3 è opposta ad essa e rivolta verso l'alto. F_2 è entrante nel piano del foglio ed F_4 uscente.

Poiché le forze sono opposte a due a due, la loro risultante è nulla.

Dalla dinamica si deduce quindi che il corpo non trasla. Calcoliamo ora la risultante dei momenti meccanici calcolati rispetto al polo O

$$\vec{M}=\sum_{i=1}^{4}\vec{d}_i\wedge\vec{F}_i=-\frac{\vec{b}}{2}\wedge\vec{F}_1-\frac{\vec{a}}{2}\wedge\vec{F}_2+\frac{\vec{b}}{2}\wedge\vec{F}_3+\frac{\vec{a}}{2}\wedge\vec{F}_4$$

Il il primo ed il terzo termine possiamo cancellarli in quanto nulli (forza e braccio paralleli) e che effettuando la sostituzione $F_2=-F_4$ otteniamo

$$\vec{M}=+\frac{\vec{a}}{2}\wedge\vec{F}_4+\frac{\vec{a}}{2}\wedge\vec{F}_4=\vec{a}\wedge\vec{F}_4=I\,\vec{a}\wedge(-\vec{b})\wedge\vec{B}=I\,\vec{b}\wedge(\vec{a})\wedge\vec{B}$$

Il vettore $\vec{b}\wedge\vec{a}$ ha modulo l'area A della spira, direzione perpendicolare ad essa e verso dato dalla regola della vite destrorsa. Definiamo quindi

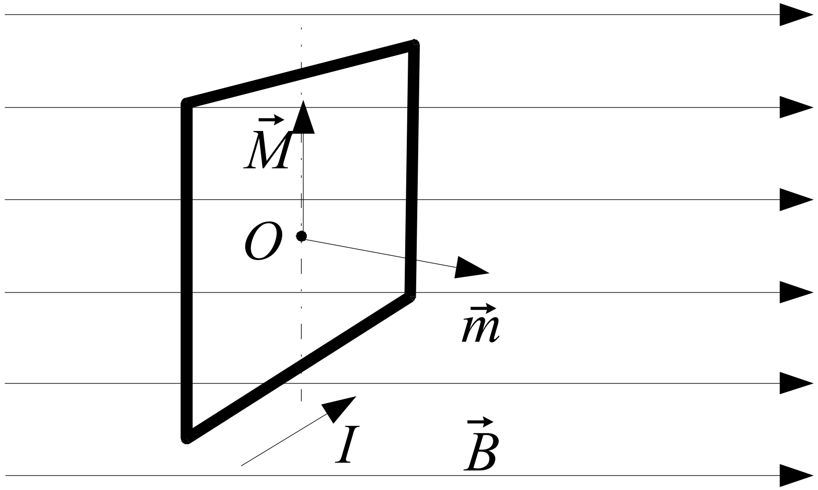
$$\vec{m}=IA\,\hat{n}$$

il momento di dipolo magnetico della spira.

Forza magnetica su una spira rettangolare percorsa da corrente

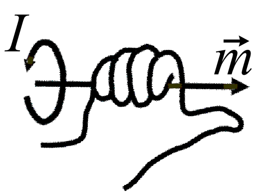
Quindi una spira percorsa da corrente è soggetta ad un momento meccanico delle forze

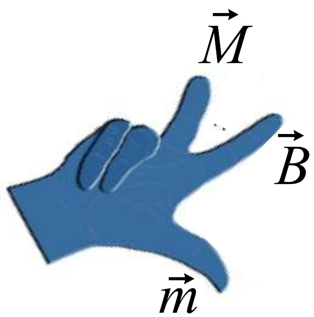
$$\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

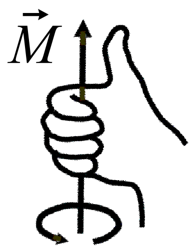


Tale momento meccanico induce una rotazione che tende ad allineare il momento di dipolo magnetico della spira al campo magnetico.
La spira verrà quindi accelerata ed inizierà ad oscillare attorno alla posizione di equilibrio (assenza di attrito). In presenza di attrito la spira, dopo alcune oscillazioni smorzate, si fermerà nella posizione in cui *B* e *m* sono allineati.

Per ricavare velocemente il verso di rotazione si può ragionare in questo modo:
si trova il momento di dipolo magnetico tramite la regola della vite destrorsa. Quindi con la regola della mano destra si trova il momento meccanico, ed ora con la regola della vite destrorsa, in cui poniamo il pollice sul momento meccanico calcoliamo il verso di rotazione della spira, coincidente al verso di rotazione delle dita intorno al pollice.

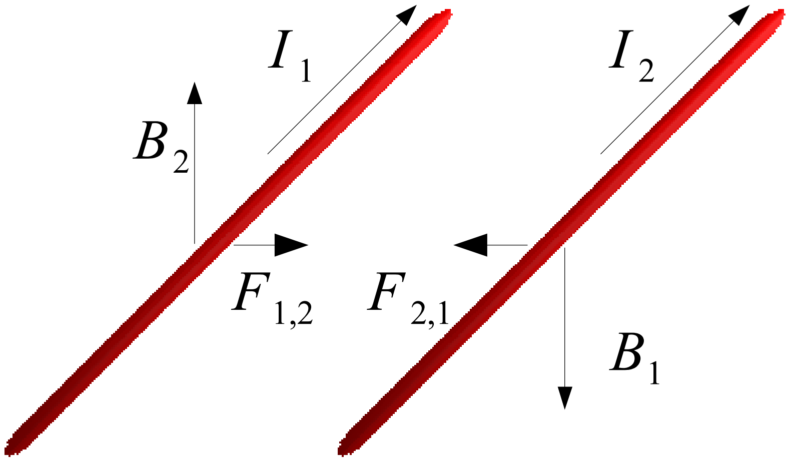






Forza magnetica tra due conduttori

Un conduttore percorso da corrente genera un campo magnetico nello spazio circostante; un filo percorso da corrente subisce la forza (di Lorentz) da parte di un campo magnetico. Possiamo pensare allora che un conduttore generi un campo magnetico che a sua volta eserciti la forza di Lorentz su un altro conduttore. Una legge che descrive questo fenomeno si ricava in questo modo: consideriamo per semplicità due conduttori paralleli percorsi da due correnti equi verse:



Il conduttore *1* risente della forza del campo magnetico generato dal conduttore *2*. Questa forza è

$$\vec{F}_{1,2} = I_1 \vec{L} \wedge \vec{B}_2$$

ed è diretta verso destra, come in figura. La forza esercitata dal campo magnetico generato da *1* su *2* è

$$\vec{F}_{2,1} = I_2 \vec{L} \wedge \vec{B}_1$$

I campi, dati dalla legge di Biot-Savart, sono

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi R}$$

Sostituiti nelle due espressioni della forza danno questi risultati:

$$F_{1,2} = F_{2,1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} L \qquad f_{1,2} = f_{2,1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}$$

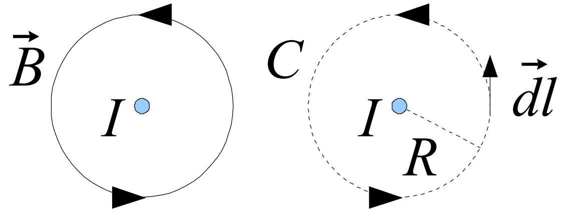
le due forze per unità di lunghezza sono uguali in modulo e direzione ma, come si vede dal disegno, di verso opposto, in accordo con il principio di azione e reazione.
Notiamo inoltre che si tratta di forza attrattiva. Un calcolo su correnti opposte mostra che la forza che si instaura tra i conduttori è di tipo repulsivo.

LIUC

Legge di Ampere

Il teorema di Gauss per il campo elettrostatico afferma che possiamo calcolare il campo elettrico su una certa superficie se conosciamo la carica in esso contenuta. La legge di Ampere è simile ed afferma che possiamo calcolare il campo magnetico su un certo cammino, se conosciamo le correnti interne a questo cammino. Per semplicità risolviamo un caso semplice e poi lo generalizziamo.

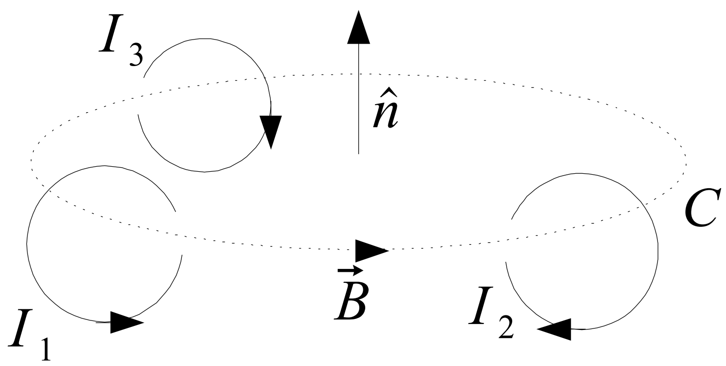
Supponiamo di avere un conduttore percorso da corrente. Questo genera un campo magnetico nello spazio circostante, di cui calcoliamo la circuitazione su un percorso circolare



$$\oint_C \vec{B}\cdot\vec{dl}=B\,2\pi R=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}2\pi R=\mu_0 I$$

Il prodotto scalare dentro l'integrale è semplicemente *Bdl* in quanto, punto per punto, *B* e *dl* sono paralleli. Poiché *B* è costante su tutta la circonferenza possiamo portarlo fuori dall'integrale, il cui valore a questo punto è proprio la lunghezza della circonferenza.

Il caso può essere esteso a più correnti all'interno del circuito, come in figura. In questo caso la circuitazione di B è la somma algebrica delle correnti concatenate, considerate positive se nel tratto di conduttore interno al circuito sono equi verse alla normale *n*, negative in caso opposto.



$$\oint_C \vec{B}\cdot\vec{dl}=\mu_0(-I_1+I_2-I_3)$$