INGEGNERIA GESTIONALE
corso di Fisica Generale

Prof. E. Puddu

LEZIONE DEL 24 SETTEMBRE 2008

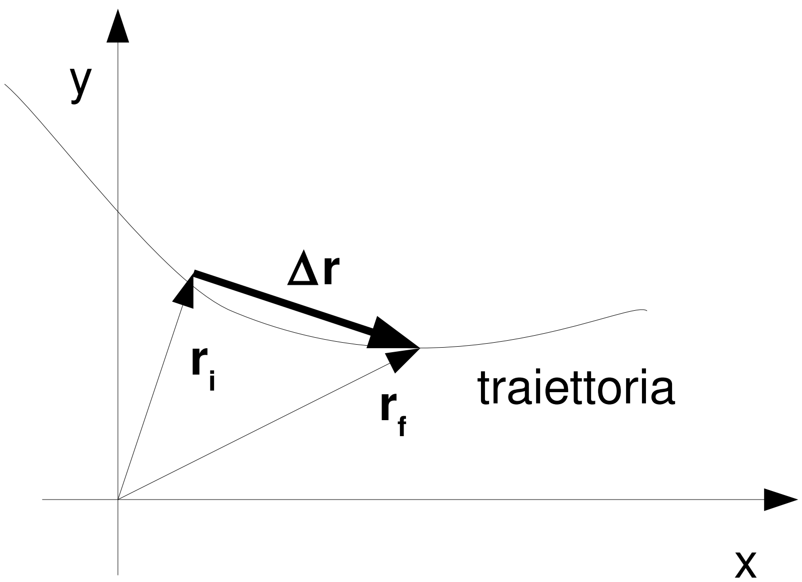
Moto in due dimensioni

LIUC

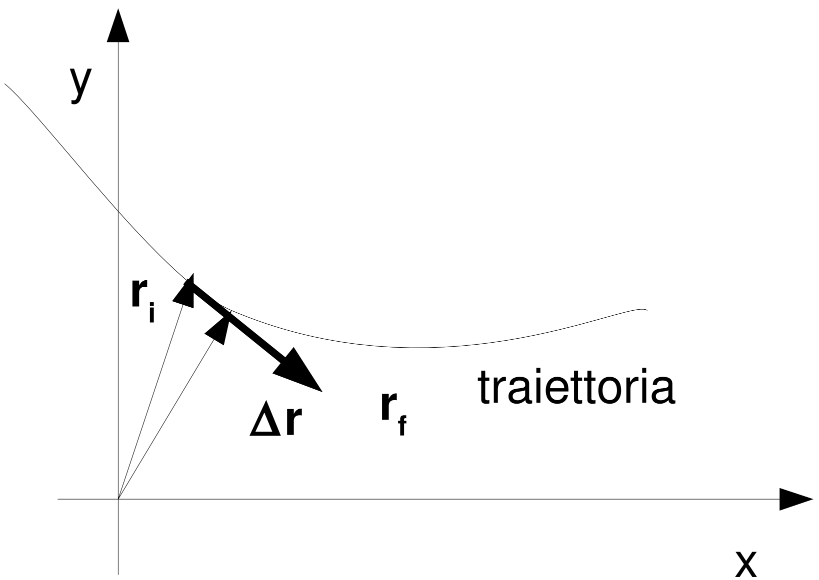
Spostamento e velocità

Posizione e spostamento

La posizione di un punto materiale nel piano è data dal vettore **r**=(x,y). Come si vede in figura, il vettore **Δr** rappresenta lo spostamento.



Si noti che lo spostamento non dipende dalla traiettoria percorsa bensì solo dalla posizione iniziale e finale. Lo spostamento tende alla tangente alla traiettoria quando il vettore $\mathbf{r}_f$ si avvicina a $\mathbf{r}_i$.



Velocità media

La velocità media, analogamente al caso unidimensionale, è definita come

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

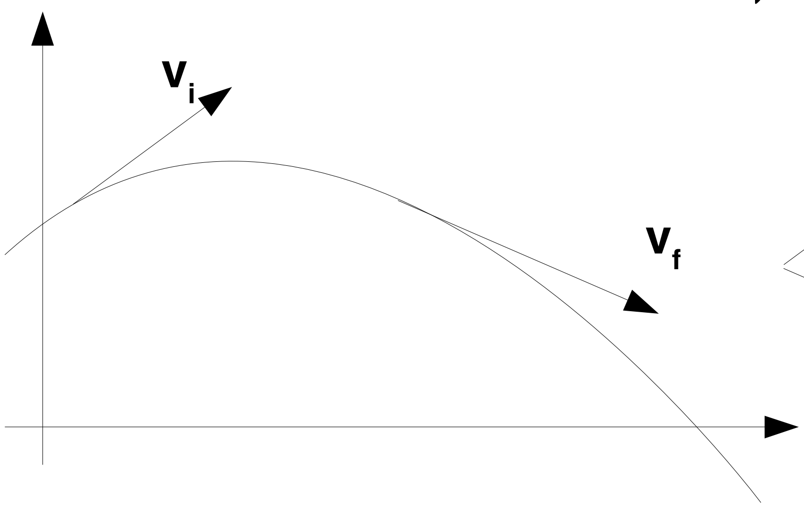
Poiché dividendo un vettore per uno scalare positivo si ottiene un vettore con stessa direzione e verso, il vettore velocità media ha direzione e verso dello spostamento.

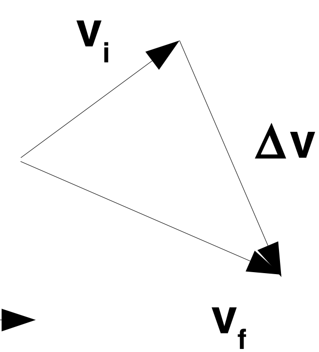
Velocità ed accelerazione

Velocità istantanea

La velocità istantanea si ottiene al limite di Δt che tende a zero. Poiché è diretta come lo spostamento per $\mathbf{r}_f$ molto vicino ad $\mathbf{r}_i$, allora essa è tangente, punto per punto, alla traiettoria.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$





accelerazione media

L'accelerazione media è il vettore ottenuto dividendo l'incremento $\Delta\mathbf{v}$ sulla velocità per l'intervallo di tempo trascorso Δt

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

accelerazione istantanea

Quindi, considerando due velocità iniziale e finale infinitamente vicine, e Δt $\rightarrow$ 0 otteniamo l'accelerazione istantanea:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Moto in due dimensioni con accelerazione costante

Il vettore posizione **r**, nel piano xy, può essere sempre scritto nelle sue coordinate x(t) ed y(t). Queste due coordinate (e quindi **r**(t)) variano nel tempo, mentre **i** e **j** sono, come sempre, i versori per ascissa ed ordinata.

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}$$

Anche la velocità, ricavata come spiegato nelle pagine precedenti, si può scomporre nelle sue singole componenti:

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\hat{i} + v_y(t)\,\hat{j}$$

Poiché l'accelerazione è supposta costante, il vettore **a** si può scomporre in due componenti indipendenti dal tempo:

$$\vec{a} = a_x\,\hat{i} + a_y\,\hat{j}$$

Riscrivendo quindi $v_x(t)=v_{ox}+a_xt$ e $v_y(t)=v_{oy}+a_yt$, otteniamo, per il vettore velocità, l'espressione:

$$\vec{v}(t) = v_{0,x}\,\hat{i} + v_{0,y}\,\hat{j} + a_x t\,\hat{i} + a_y t\,\hat{j} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

Dove abbiamo definito $\mathbf{v_0}=v_{ox}\mathbf{i}+v_{oy}\mathbf{j}$.
Definendo quindi $x(t)=x_0+v_{0x}t+1/2a_xt^2$ e $y(t)=y_0+v_{0y}+1/2a_yt^2$ riscriviamo

$$\vec{r}(t) = x_0\,\hat{i} + y_0\,\hat{j} + v_{0x}t\,\hat{i} + v_{0y}t\,\hat{j} + \frac{1}{2}a_x t^2\,\hat{i} + \frac{1}{2}a_y t^2\,\hat{j}$$

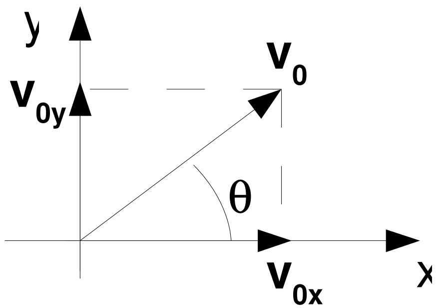
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

Dove abbiamo definito $\mathbf{r_0}=x_o\mathbf{i}+y_o\mathbf{j}$.

Moto di un proiettile

Il moto di un proiettile è il moto di un corpo sottoposto all'accelerazione di gravità in un sistema nel quale si possa trascurare l'attrito con l'aria. Questo tipo di moto ha una traiettoria parabolica.

Supponiamo che un proiettile venga lanciato da terra con velocità $\mathbf{v_0}$ ad un angolo θ sopra l'orizzonte



La velocità si può allora scomporre, come visto in precedenza, nelle sue componenti cartesiane

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\,\hat{i} + v_{0y}\,\hat{j} = v_0 \cos\theta\,\hat{i} + v_0 \sin\theta\,\hat{j}$$

Per quanto riguarda la posizione iniziale del corpo, assumiamo che esso si trovi all'origine degli assi, per cui porremo $x_0=0$ ed $y_0=0$. L'unica accelerazione esistente inoltre è l'accelerazione di gravità, diretta nel verso delle y negative:

$$\vec{g} = -g\,\hat{j}$$

Lungo la direzione x quindi non esiste alcuna accelerazione. Possiamo scrivere quindi il moto del proiettile come moto in due dimensioni

$$x(t) = v_{0x}\,t$$

$$y(t) = v_{0y}\,t - \frac{1}{2} g\,t^2$$

A cui associamo, per la velocità

$$v_x(t) = v_{0x}$$

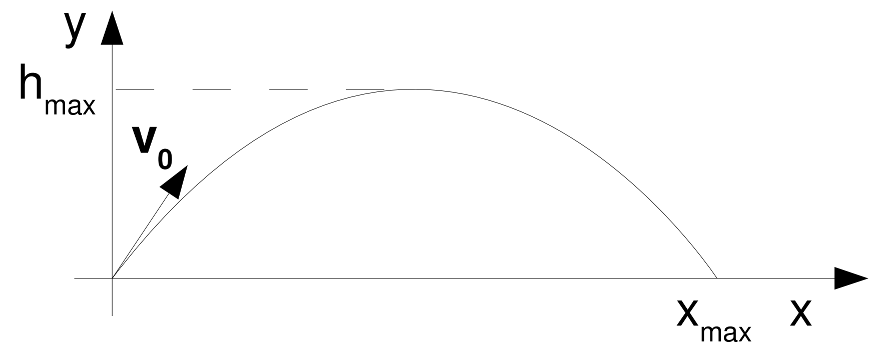
$$v_y(t) = v_{0y} - g\,t$$

Moto di un proiettile

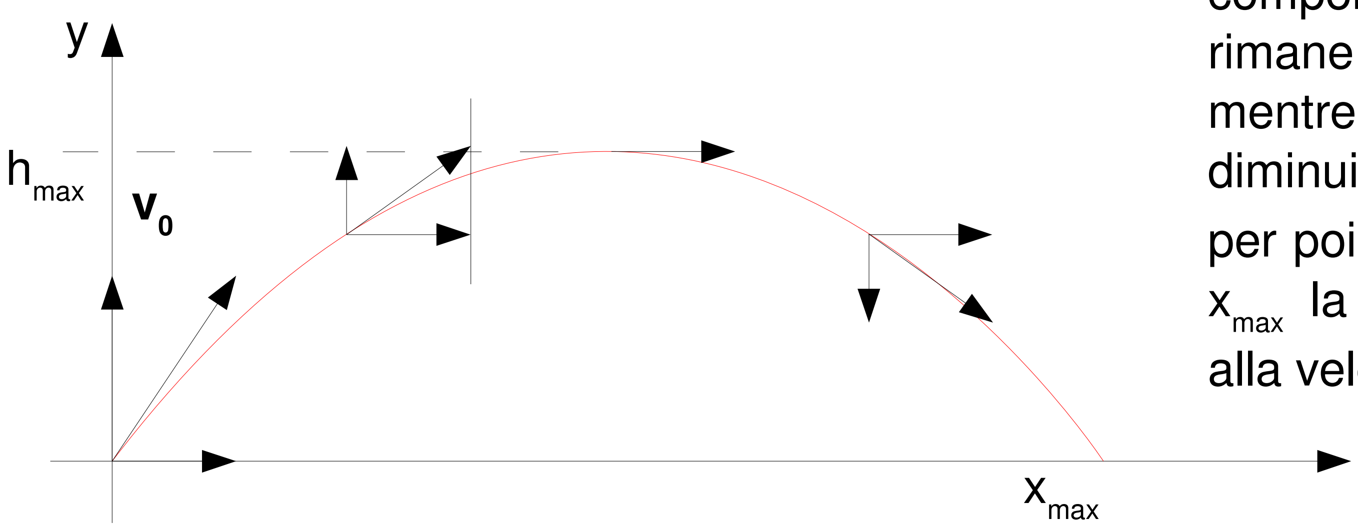
Il primo approccio al problema è quello di trovare la traiettoria del proiettile, ottenuta risolvendo l'equazione x(t) rispetto alla variabile t e sostituendo il valore ottenuto nell'equazione y(t)

$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$

$$y(x) = x \tan\theta - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\theta}$$



Dalla traiettoria osserviamo che il punto raggiunge una quota massima h_{max} ed una distanza massima x_{max} chiamata gittata. Prima di calcolare questi due valori, analizziamo cosa accade al vettore velocità lungo la traiettoria del proiettile:



Come si osserva dal grafico, la componente della velocità lungo x rimane costante lungo la traiettoria, mentre la componente lungo y diminuisce fino ad annullarsi (in h_{max}) per poi diventare negativa. Nel punto x_{max} la velocità è in modulo uguale alla velocità v_0.

Moto di un proiettile

Per ricavare la massima quota raggiunta, possiamo analizzare la funzione traiettoria e ricavarne la coordinate del vertice. Allo stesso modo possiamo calcolare i valori dell'ascissa per i quali si annulla l'ordinata, ottenendo la gittata. A questo tipo di analisi, che lascio per esercizio allo studente, preferisco un'analisi cinematica!

La massima quota raggiunta è la coordinata y del punto in cui la componente v_y della velocità si annulla.Da questa equazione ricaviamo il tempo impiegato dal proiettile per giungere a quota massima, dopodiché lo sostituiamo nella legge oraria y(t), ricavando appunto h_{max}.

$$v_y(t)=0 \rightarrow t_{hmax}=\frac{v_{0y}}{g}$$ Da cui ricaviamo

$$y\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)=h_{max}=v_{0y}\frac{v_{0y}}{g}-\frac{1}{2}g\left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2$$ ovvero

$$h_{max}=\frac{1}{2}\frac{v_{0y}^2}{g}$$

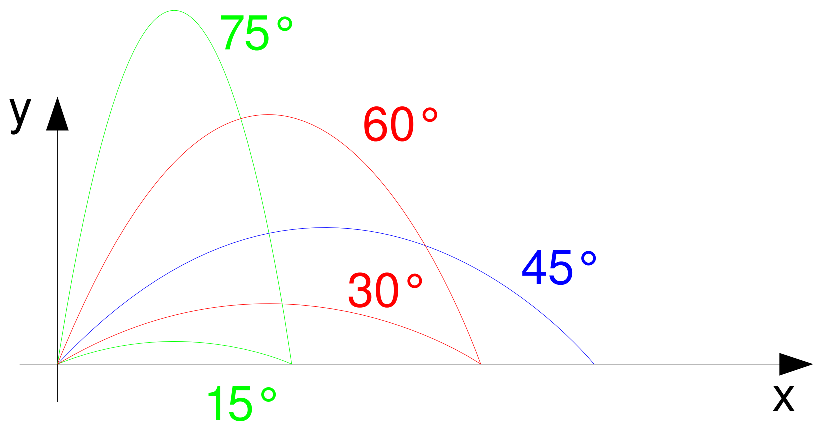
Per ricavare la gittata, consideriamo che il moto parabolico è simmetrico rispetto al vertice. Per questa ragione, il tempo impiegato dal proiettile per raggiungere il punto x_{max} è doppio rispetto al tempo impiegato per raggiungere h_{max}.

$$t_{xmax}=2\frac{v_{0y}}{g}$$ Da cui ricaviamo

$$x\left(2\frac{v_{0y}}{g}\right)=x_{max}=v_{0x}2\frac{v_{0y}}{g}=\frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta)$$

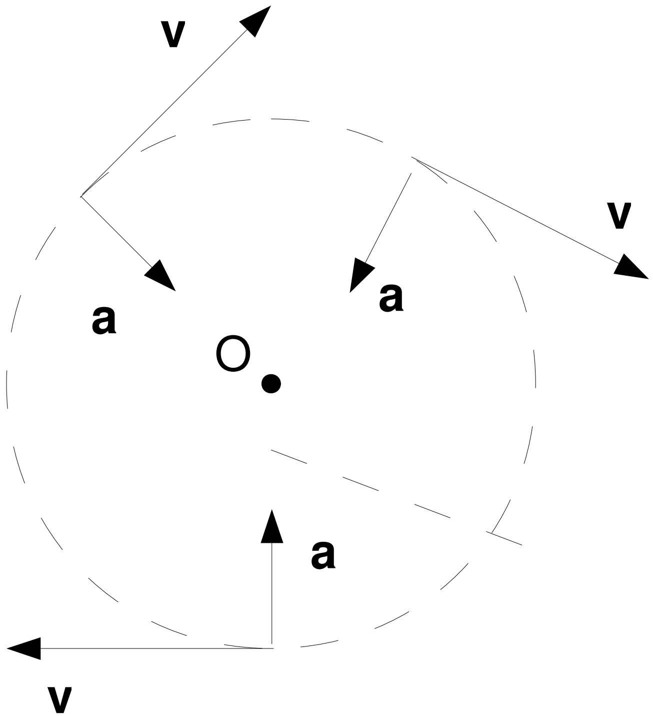
Moto di un proiettile

Un'analisi dei risultati ottenuti ci permette di capire che sia l'altezza massima sia la gittata massima dipendono solo dal modulo della velocità iniziale e dall'accelerazione di gravità. In particolare notiamo che la gittata è massima quando è massima la funzione $\sin(2\theta)$ ovvero per $\theta=45°$. Inoltre, per angoli complementari si ha la stessa gittata.



Moto circolare uniforme

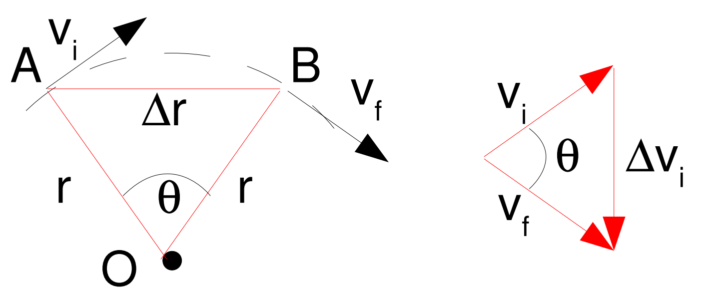
Il moto circolare uniforme è un moto che avviene su un percorso circolare e con modulo della velocità v costante. Poiché la velocità cambia ad ogni istante direzione, c'è un'accelerazione a_c non nulla rivolta verso il centro della circonferenza, che chiameremo accelerazione centripeta..



Dimostriamo ora che esiste una relazione tra accelerazione e velocità v, ovvero che

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

Per dimostrare questa relazione consideriamo il settore circolare di figura in cui notiamo che i triangoli rossi sono simili



$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta v}{v}$$

Il grafico di sopra mostra anche che l'accelerazione, diretta come Δv, è diretta verso il centro!!!

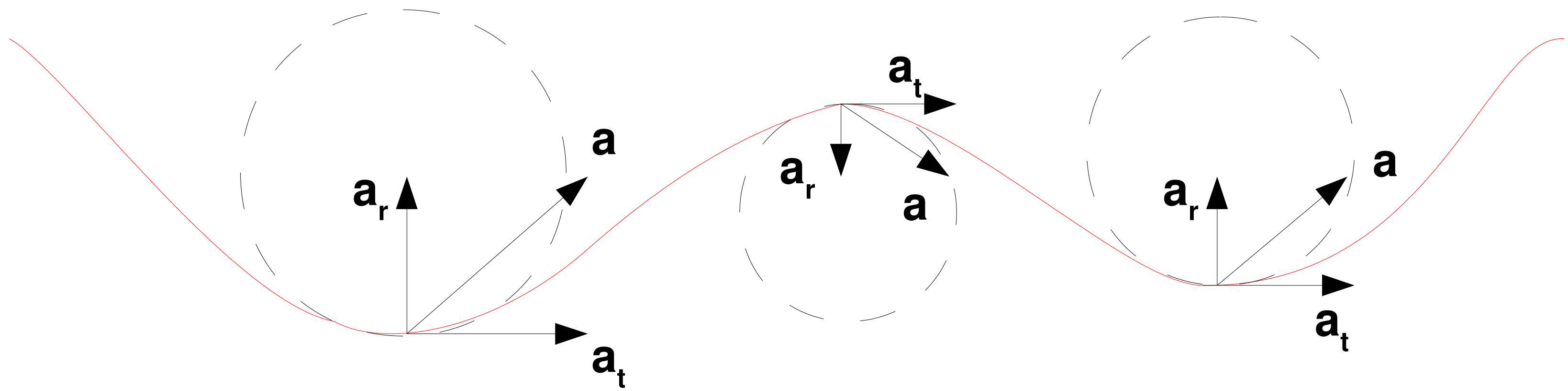
L'accelerazione media è definita come

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Ovvero, sfruttando le proprietà dei triangoli simili

$$\vec{a}_m = \frac{v}{r}\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{v}{r} v = \frac{v^2}{r}$$

Accelerazione tangenziale e accelerazione radiale



Se oltre a curvare, ovvero a cambiare direzione e verso, un corpo cambia anche modulo della velocità, allora diremo che possiede anche una componente tangenziale dell'accelerazione:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$$

Dove a_r è l'accelerazione radiale (centripeta) ed a_t quella tangenziale.

L'accelerazione radiale è, istante per istante,

$$\vec{a}_r = \frac{v^2}{r}$$

Mentre quella tangenziale si trova come derivata del modulo della velocità!!!

$$\vec{a}_t = \frac{d\left|\vec{v}\right|}{dt}$$