Laboratorio: Metodi quantitativi per il calcolo del VaR

Aldo Nassigh
Financial Risk Management A.A. 2011/12
Lezione 4

- Posizione il cui valore attuale è soggetto ad un solo fattore di mercato (fattore di rischio)

- La dipendenza tra il valore della posizione ed il valore assunto dal fattore di mercato è di tipo **lineare**

Esempi: Posizione *cash* in azioni/cambi/merci, obbligazione (approssimazione basata sulla sola *duration)*, opzione (approssimazione *delta*)

- La distribuzione dei rendimenti del fattore di rischio è approssimata dalla distribuzione **normale**

$$VaR = PV^0 \cdot \delta \cdot c_{std}^q \cdot \sigma_{\Delta t}$$

PV^0 è il valore attuale della posizione

δ è il fattore di proporzionalità tra il valore della posizione e quello del fattore di mercato

c_q^{std} è il quantile della distribuzione normale standard corrispondente all'intervallo di confidenza q scelto (1.65 se q=95%, 2.33 se q=99% etc)

$\sigma_{\Delta t}$ è la volatilità del fattore di rischio stimata per il periodo di detenzione Δt

Approssimazione delta-normal

- Posizione il cui valore attuale è soggetto ad un solo fattore di mercato (fattore di rischio)
- La dipendenza tra il valore della posizione ed il valore assunto dal fattore di mercato è di tipo **lineare**
- La distribuzione dei rendimenti del fattore di rischio è approssimata dalla distribuzione **normale**
- E' generato un vettore di realizzazioni della P/L ipotetica

$$PL_i = PV^0 \cdot \delta \cdot \sigma_{\Delta t} \cdot \varepsilon_i \qquad i = 1, \ldots, N$$

ε_i è una realizzazione della distribuzione normale standard N(0,1)

Il VaR è calcolato numericamente come quantile della distribuzione simulata generata dal vettore delle realizzazioni di P/L ipotetica

- Portafoglio il cui valore attuale è soggetto ad M fattori di mercato (fattori di rischio)
- La dipendenza tra il valore di ciascuna posizione ed il valore assunto dal(dai) fattore(i) di mercato è di tipo **lineare**
- La distribuzione dei rendimenti dei fattori di rischio è approssimata dalla distribuzione **normale multivariata**
- Il Value-at-risk di portafoglio è:

$$VaR^{port} = \sqrt{\mathbf{VaR}^T \mathbf{R}\,\mathbf{VaR}}$$

VaR è il vettore M-dimensionale le cui componenti sono i valori del VaR parametrico relativo a ciascun fattore di rischio

R è la matrice di correlazione dei fattori di rischio

[RMTD § 6.3]

Approssimazione delta-normal multi-dimensionale

- Portafoglio il cui valore attuale è soggetto a 2 fattori di mercato (fattori di rischio)

$$VaR^{port} = c^{q}_{std}\sqrt{\left(PV_1^0\right)^2 \delta_1^2 \sigma_1^2 + 2PV_1^0 PV_2^0 \delta_1 \delta_2 \rho \sigma_1 \sigma_2 + \left(PV_2^0\right)^2 \delta_2^2 \sigma_2^2}$$

- Nel caso M=2, la matrice di correlazione dei fattori di rischio assume la forma:

1	ρ
ρ	1

MATRICE VARCOV E MATRICE DI CORRELAZIONE

- Date M variabili casuali r_i (rendimenti dei fattori di rischio) con valore atteso μ_i si introduce la matrice simmetrica VARCOV Σ

$$\Sigma_{ij} = \mathrm{E}\{(r_i - \mu_i)(r_j - \mu_j)\}$$

- Nel risk management finanziario, i termini della matrice VARCOV sono comunemente espressi in funzione delle deviazioni standard (volatilità) delle singole variabili casuali e della matrice di correlazione

σ^2_1	$\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$	…	$\rho_{1M}\sigma_1\sigma_M$
$\rho_{12}\sigma_2\sigma_1$	σ^2_2	…	$\rho_{2M}\sigma_2\sigma_M$
…	…	…	…
$\rho_{1M}\sigma_M\sigma_1$	$\rho_{2M}\sigma_M\sigma_2$	…	σ^2_M

[PAP § 7]

- La matrice R, stimata attraverso l'analisi di serie storiche mediante il metodo di Pearson

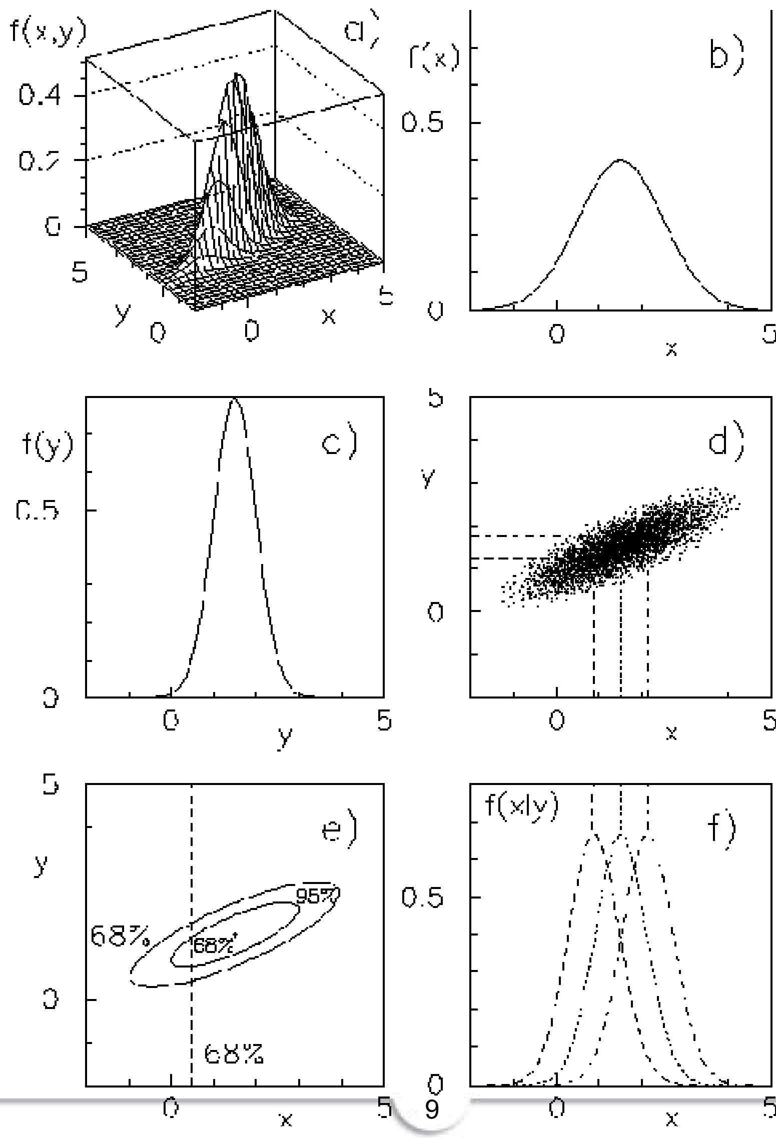
$$\rho_{ij} = \frac{\langle r_i r_j \rangle - \langle r_i \rangle \langle r_j \rangle}{\sqrt{\left\langle r_i^2 - \langle r_i \rangle^2 \right\rangle \left\langle r_j^2 - \langle r_j \rangle^2 \right\rangle}}$$

è uno strumento molto diffuso per la stima della co-dipendenza dei fattori di rischio

- **Il calcolo della matrice VARCOV e della matrice R è compatibile con ogni possibile distribuzione dei rendimenti dei fattori di rischio**

- La formula introdotta per il VaR delta-normal di portafoglio presuppone che i rendimenti di portafoglio siano distribuiti normalmente, ovvero che una combinazione lineare di variabili distribuite normalmente (i rendimenti dei singoli fattori di rischio) sia normale anch'essa
- **Tale assunzione equivale ad imporre che la distribuzione dei rendimenti dei fattori di rischio sia una normale multivariata** [PAP § 7]
- La distribuzione normale multivariata dei rendimenti dei fattori di rischio è assegnata in modo univoco dalla matrice VARCOV
- In due dimensioni (normale bivariata), si veda [PAP § 6] :

NORMALE BIVARIATA - ESEMPI



- Portafoglio il cui valore attuale è soggetto ad M fattori di rischio
- La dipendenza tra il valore di ciascuna posizione ed il valore assunto dal(dai) fattore(i) di mercato è di tipo **lineare**
- La distribuzione dei rendimenti dei fattori di rischio è approssimata dalla distribuzione **normale multivariata** con matrice di correlazione **R**
- Sono generati M vettori di realizzazioni della P/L ipotetica per ciascun fattore di rischio

$$PL_{ij} = PV_j^0 \cdot \delta_j \cdot \sigma_{j\Delta t} \cdot \varepsilon_{ij} \qquad i = 1,\dots,N \quad j = 1,\dots,M$$

$\varepsilon_i = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_M)$ è una realizzazione della distribuzione normale standard multivariata N(0,**R**)

- Il vettore delle realizzazioni della P/L ipotetica di portafoglio è calcolato sommando termine a termine i vettori relativi a ciascun fattore di rischio

$$PL_i = \sum_{j=1}^{M} PL_{ij} \qquad i = 1,\dots,N$$

Il VaR è calcolato numericamente come quantile della distribuzione simulata generata dal vettore delle realizzazioni di P/L ipotetica

[RMTD § 7]

LETTURE CONSIGLIATE

Letture consigliate:

[PAP] A. Papoulis, S. U. Pillai, Probability, Random Variables and Stochastic Processes, Mc Graw Hill NY Fourth Ed. 2002

[RMTD] J.P.Morgan/Reuters, RiskMetrics TM —Technical Document (Fourth Ediction 1996)