

Laboratorio: Metodi quantitativi avanzati per la valutazione del rischio di mercato

**Aldo Nassigh
Financial Risk Management A.A. 2011/12
Lezione 6**



FAT TAILS

- La distribuzione empirica di numerosi fattori di rischio presenta *fat tails*. Se confrontata con la distribuzione normale avente la medesima media e deviazione standard, la distribuzione empirica presenta:
 1. Maggiore densità di probabilità nella regione prossima al valor medio (regione *centrale* della distribuzione)
 2. Maggiore densità di probabilità in prossimità dei valori estremi assunti dai rendimenti dei fattori di rischio (*code* della distribuzione)
(una distribuzione che evidenzia le proprietà 1. e 2. è anche detta **leptocurtica**)
- Quest'ultima proprietà influisce, spesso in modo critico sulle misure di rischio derivate dalla distribuzione, in primo luogo VaR, ma anche ES
- Se il VaR è calcolato attraverso metodologie basate sull'assunzione di normalità nella distribuzione dei rendimenti dei fattori di rischio, nella generalità dei casi la presenza di *fat tails* porterà a **sottostimare** il rischio.
- In dipendenza dalla linearità del portafoglio, la presenza di *fat tails* nella distribuzione dei fattori di rischio sarà amplificata/ridotta nella distribuzione dei rendimenti del portafoglio calcolati

- Tra i numerosi test disponibili per la verifica della deviazione dalla normalità di una distribuzione empirica, con conseguente verifica della presenza di *fat tails* ricordiamo due test grafici elementari:
 1. Confronto tra l'istogramma realizzato in base alla distribuzione empirica e la distribuzione normale avente medesima media e deviazione standard (un esempio è stato presentato in aula nella lezione #5)
 2. Confronto tra i quantili della distribuzione empirica ed i corrispondenti quantili della distribuzione normale (Quantile-Quantile plots – Q-Q plots)



Q-Q PLOT

- Si assegna ad ogni campione di una distribuzione empirica pari probabilità
- Su N campioni, la probabilità cumulata p_j che il rendimento r sia inferiore al quantile corrispondente al j -esimo campione ordinato è approssimata da

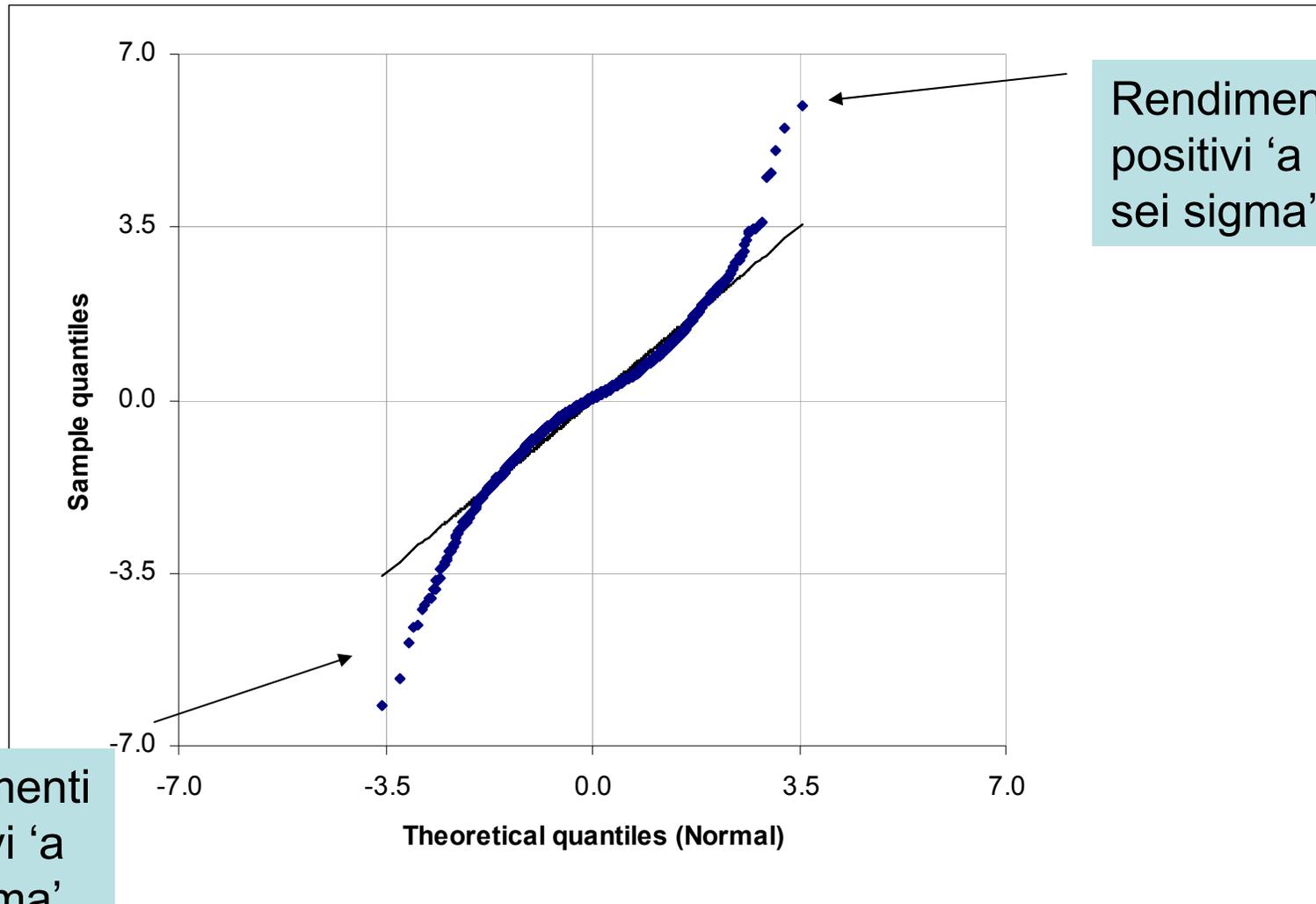
$$P\{r < q_j\} \approx \frac{j-0.5}{N} := p_j \quad j = 1, \dots, N$$

- Se la distribuzione empirica corrisponde ad una realizzazione di una distribuzione normale, il rendimento che corrisponde ad una probabilità cumulata pari a p_j è z_j , ove:

$$z_j = \Phi_{\mu, \sigma}^{-1}(p_j) \quad j = 1, \dots, N$$

- Il Q-Q plot consiste nel rappresentare su di un piano cartesiano i punti definiti dalle coppie (q_j, z_j)
- E' consuetudine normalizzare i rendimenti della distribuzione empirica rispetto a media (μ) e deviazione standard (σ)

Esempio: S&P MIB 1998-2008 (2,734 campioni)

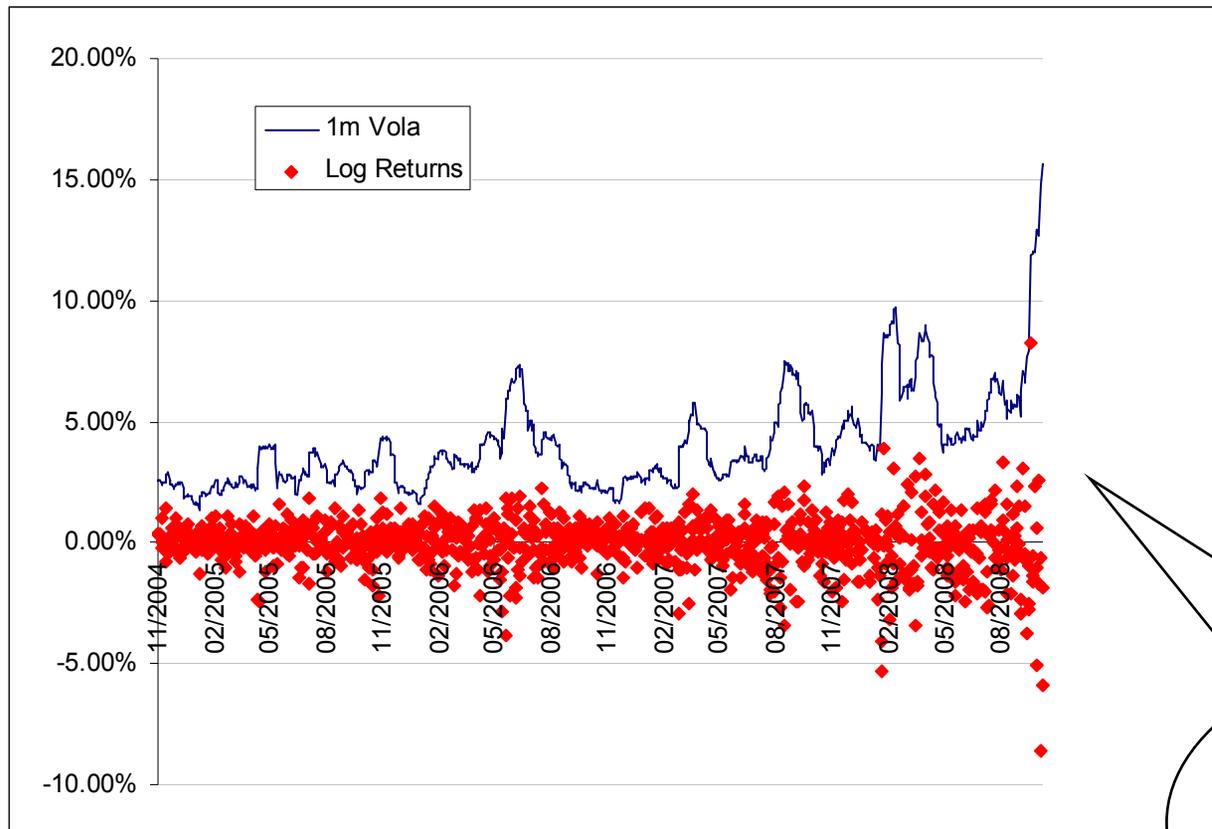




Volatility Clustering

- La presenza di marcati scostamenti dalla normalità è anche conseguenza del fenomeno detto *Volatility Clustering*
- Periodi caratterizzati da ampie fluttuazioni dei rendimenti sono raggruppati (*clustered*) e seguiti da periodi nei quali, al contrario, i rendimenti mostrano variabilità ridotta rispetto alla deviazione standard del campione
- Se si utilizza come misura di volatilità la varianza, è lecito ipotizzare che la varianza stessa della distribuzione dei rendimenti vari nel tempo (**eteroschedasticità**)
- Quest'ultima proprietà influisce, spesso in modo critico sulle misure di rischio derivate dalla distribuzione, in primo luogo VaR, ma anche ES
- Se il VaR è calcolato attraverso metodologie basate sull'assunzione di **stazionarietà** nella distribuzione dei rendimenti dei fattori di rischio, nella generalità dei casi la presenza di *volatility clustering* porterà a **sottostimare** il rischio ad ogni transizione del mercato da un regime a bassa volatilità ad uno ad alta volatilità
- Proprietà essenziale diventa la prontezza con la quale la misura di rischio (VaR, ES) si adegua al cambio di regime di volatilità

Esempio: S&P MIB 2004-2008 (1,000 campioni)



Volatility clustering:
Il mercato passa da periodi
di bassa volatilità a
periodi di alta volatilità

Exponential Weighted Moving Average (EWMA)

J.P.Morgan/Reuters, *RiskMetrics TM — Technical Document (Fourth Edition 1996) – Pg. 78*

Table 5.1
Volatility estimators*

| Equally weighted | Exponentially weighted |
|--|--|
| $\sigma = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \mu)^2}$ | $\sigma = \sqrt{(1 - \lambda) \sum_{t=1}^T \lambda^{t-1} (r_t - \mu)^2}$ |

* In writing the volatility estimators we intentionally do not use time subscripts.

Limite per T grande:

$$[5.1] \quad \sum_{j=1}^T \lambda^{j-1} \equiv \frac{1}{(1 - \lambda)}$$

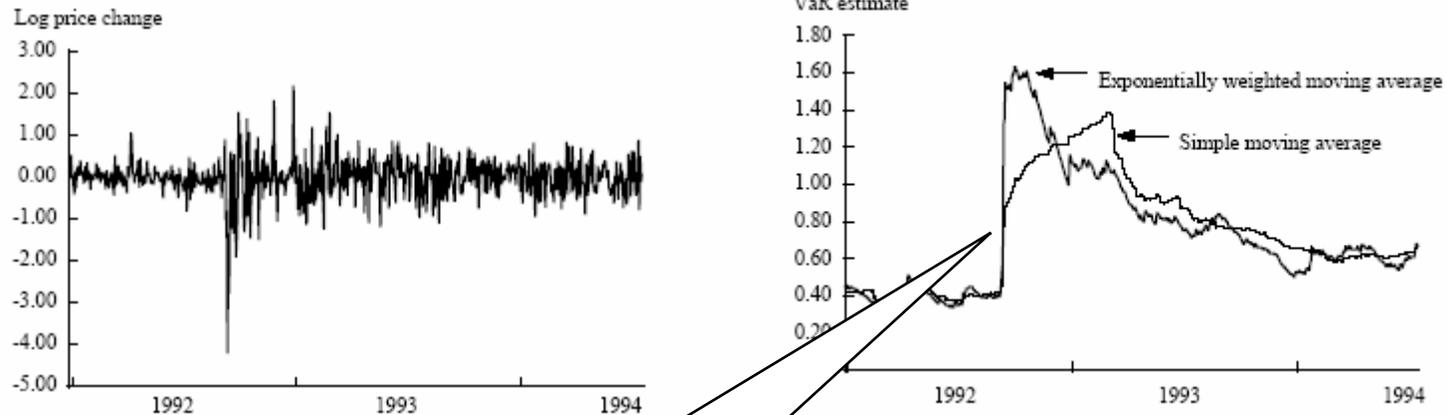
Riskmetrics introduce l'EWMA nella stima della volatilità per il calcolo del VaR con metodo parametrico per ottenere il più rapido adeguamento del VaR in caso di cambio di regime di volatilità

Il parametro lambda è fissato a 0.94

Confronto tra dev. standard semplice ed EWMA durante la 1992 *FX crisis* (Lira italiana e GBP fuori dall'EMU)

J.P.Morgan/Reuters, *RiskMetrics TM* — *Technical Document* (Fourth Edition 1996) – chapter 5

Log price changes in GBP/DEM and VaR estimates (1.65σ)



Rapida crescita del VaR in occasione della crisi

Equivalenza tra EWMA e GARCH(1,1)

J.P.Morgan/Reuters, *RiskMetrics TM* — *Technical Document* (Fourth Edition 1996) – Pg. 82

$$\begin{aligned} \sigma_{1,t+1|t}^2 &= (1-\lambda) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i r_{1,t-i}^2 \\ [5.5] \quad &= (1-\lambda) \left(r_{1,t}^2 + \lambda r_{1,t-1}^2 + \lambda^2 r_{1,t-2}^2 + \dots \right) \\ &= (1-\lambda) r_{1,t}^2 + \lambda (1-\lambda) \left(r_{1,t-1}^2 + \lambda r_{1,t-2}^2 + r_{1,t-3}^2 \right) \\ &= \lambda \sigma_{1,t|t-1}^2 + (1-\lambda) r_{1,t}^2 \end{aligned}$$

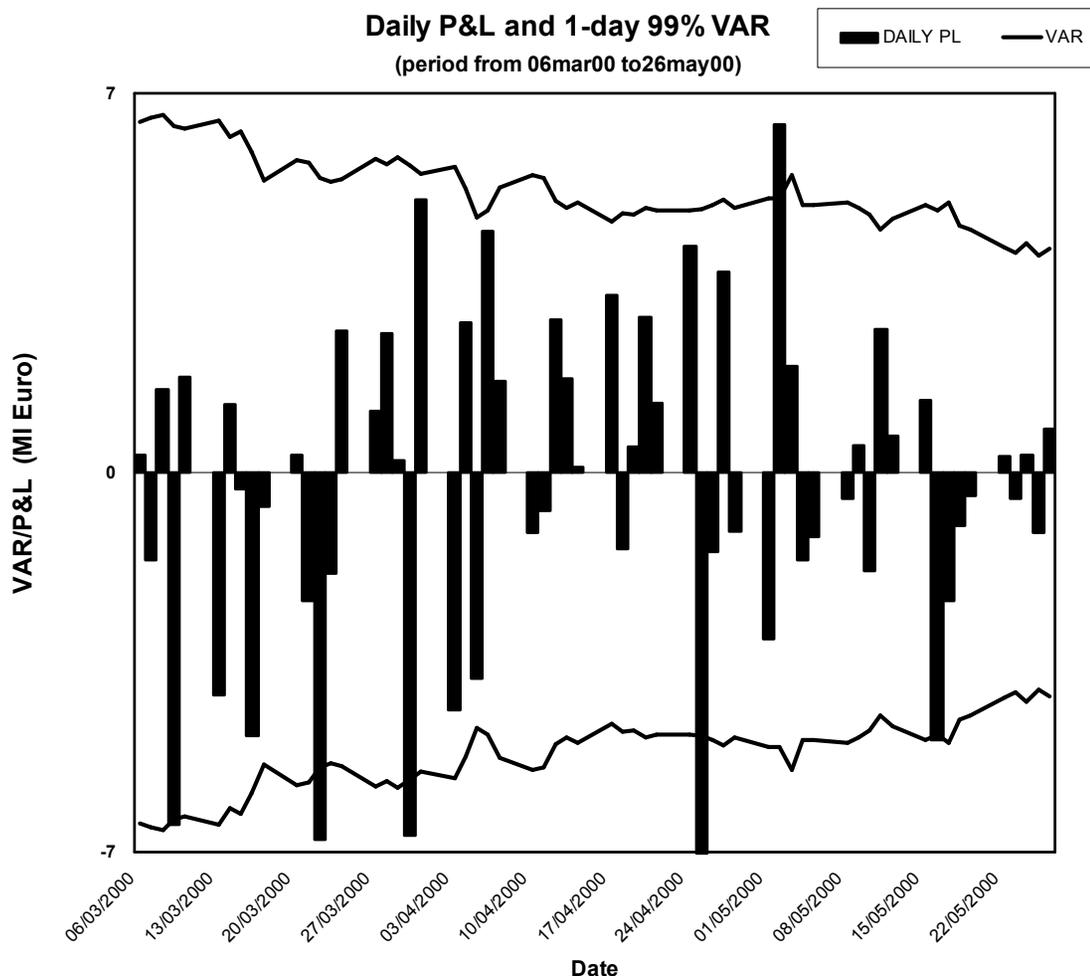
GARCH(1,1)



TEST RETROSPETTIVI

- Una misura di rischio che valuti l'ampiezza di perdite potenziali, avendo assegnato intervallo di confidenza e orizzonte temporale (es: VaR, ES) è soggetta a test retrospettivi (*backtesting*).
- L'obiettivo del *backtesting* è verificare ex-post l'affidabilità della misura, alla luce della distribuzione delle P/L realizzate
- Il backtesting è sensibile a tutte le cause di sottostima del rischio, tra cui ricordiamo le principali:
 1. Inadeguatezza delle ipotesi alla base del modello per la descrizione dei fattori di rischio (es: deviazioni dalla normalità, lentezza del modello nell'adeguarsi a cambiamenti di regime di volatilità, struttura complessa delle co-dipendenze)
 2. Semplificazione eccessiva nella scelta dei fattori di rischio, con conseguente incapacità di spiegare la P/L realizzata
 3. Semplificazione eccessiva nella rivalutazione del portafoglio (es: uso di linearizzazioni)

TEST RETROSPETTIVI – la normativa di vigilanza



- Il test retrospettivo mette a confronto il VaR, calcolato secondo il modello interno, con la variazione del valore del portafoglio* al fine di verificare se le misure di rischio elaborate dalla banca al 99° percentile coprono effettivamente il 99% dei risultati di negoziazione
- Il test si considera superato da un modello che, su un campione di 250 giorni lavorativi, produca al massimo 4 casi in cui i risultati effettivi di negoziazione non sono coperti dalla misura del rischio (“eccezioni” o “scostamenti”)
- Il test retrospettivo deve essere svolto quotidianamente

*) Il calcolo della variazione di valore del portafoglio deve essere il più possibile significativa per il confronto con il VaR, pertanto la misura più indicata è data dalla variazione effettiva netta, ovvero quella ottenuta escludendo dai risultati gestionali le commissioni, gli eventuali risultati della negoziazione infragiornaliera e il contributo relativo ai ratei di interesse

Esempio: S&P MIB 2004-2008 (1,000 campioni)

